

# Leergebied **Rekenen & Wiskunde**

Voorstel voor de basis van de herziening van de kerndoelen en eindtermen van de leraren en schoolleiders uit het ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde.

**curriculum.nu**

VANDAAG WERKEN AAN HET ONDERWIJS VAN MORGEN

# Inhoudsopgave

1. Kern van het leergebied .....	5
Schematisch overzicht van de grote opdrachten en de bouwstenen	8
2. Visie .....	11
3. Grote opdrachten .....	17
Grote opdracht 1: Getallen en bewerkingen	18
Grote opdracht 2: Verhoudingen	19
Grote opdracht 3: Meten en meetkunde	20
Grote opdracht 4: Variabelen, verschijningsvormen en formules	21
Grote opdracht 5: Data, statistiek en kans	22
Grote opdracht 6: Veranderingen en benaderingen	23
Grote opdracht 7: Gereedschap en technologie gebruiken	24
Grote opdracht 8: Wiskundig probleemoplossen	25
Grote opdracht 9: Abstraheren	26
Grote opdracht 10: Logisch redeneren	27
Grote opdracht 11: Representeren en communiceren	28
Grote opdracht 12: Modelleren	29
Grote opdracht 13: Algoritmisch denken	30
4. Bouwstenen .....	31
Getallen	32
Bewerkingen	35
Verhoudingen	37
Meten	39
Vorm en ruimte	41
Rekenen in de meetkunde	43
Verbanden, verschijningsvormen, vergelijkingen	45
Speciale verbanden	47
Kansen en kansverdelingen	49
Data en statistiek	51
Veranderingen	54
Benaderingen	56
Gereedschap en technologie gebruiken	58

Wiskundig probleemoplossen	60
Abstraheren	62
Logisch redeneren	64
Representeren en communiceren	66
Modelleren	68
Algoritmisch denken	70
5. Generieke aanbevelingen voor het leergebied .....	72
6. Generieke aanbevelingen voor de bovenbouw van het voortgezet onderwijs .....	74
Bijlage: Begrippenlijst .....	78
Ontwikkelteamleden Rekenen & Wiskunde .....	83

Het is belangrijk om leerlingen goed te blijven voorbereiden op de toekomst. Daarom hebben we in Nederland wettelijk vastgelegd wat leerlingen moeten kennen en kunnen in de vorm van kerndoelen en eindtermen: het curriculum. Deze landelijke doelen zijn dertien jaar geleden voor het laatst vastgesteld.

Om het curriculum te actualiseren, hebben leraren en schoolleiders voor negen leergebieden voorstellen gedaan die de basis vormen voor de herziening van de kerndoelen en eindtermen. Deze leergebieden zijn: Nederlands, Engels/Moderne vreemde talen, Rekenen & Wiskunde, Burgerschap, Digitale geletterdheid, Mens & Maatschappij, Mens & Natuur, Kunst & Cultuur en Bewegen & Sport.

In de periode maart 2018 tot oktober 2019 hebben zij in ontwikkelteams per leergebied de benodigde kennis en vaardigheden bepaald. Zij waren hierbij zelf aan zet, mét de inbreng van wetenschappers, lerarenopleidingen, vervolgonderwijs, scholen en vakverenigingen. Ook haalden zij feedback op bij leraren, ouders, leerlingen, maatschappelijke organisaties en het bedrijfsleven. De ontwikkelteams werden ondersteund door leerplanspecialisten.

De voorstellen zijn beperkt tot de kern van wat leerlingen moeten leren, waardoor leraren meer ruimte krijgen voor eigen invulling. Daarnaast verbetert de overgang van basisonderwijs naar voortgezet en vervolgonderwijs én de samenhang tussen leergebieden.

## Leeswijzer

In dit document vindt u het voorstel van de leraren en schoolleiders van het ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde. In hoofdstuk 1 vindt u een compact overzicht waarin de hoofdlijn van het voorstel wordt toegelicht. In de hoofdstukken erna kunt u de nadere uitwerking lezen. De inhoud is uitgewerkt in drie stappen: visie, grote opdrachten en bouwstenen. In de visie beschrijft het ontwikkelteam wat de relevantie en de kern is van het leergebied. De grote opdrachten zijn de essenties van het leergebied die van belang zijn voor de doorlopende leerlijn voor alle leerlingen, van primair onderwijs, speciaal onderwijs en alle sectoren in het voortgezet onderwijs. In de bouwstenen voor primair onderwijs en onderbouw voortgezet onderwijs zijn de essenties uitgewerkt naar kennis en vaardigheden die leerlingen nodig hebben om goed voorbereid te zijn op hun toekomst. De kennis en vaardigheden die benoemd zijn voor de onderbouw van het primair onderwijs zijn bedoeld ter inspiratie hoe een doorlopende leerlijn opgebouwd kan worden. De kerndoelen voor het primair onderwijs worden geformuleerd voor de bovenbouw van het primair onderwijs. Het team doet daarnaast aanbevelingen voor de bovenbouw van het voortgezet onderwijs.

Het voorstel van het leergebied Rekenen & Wiskunde staat niet op zichzelf. Het kent veel verbindingen met de andere leergebieden. Deze staan beschreven in de toelichting van het leergebied Rekenen & Wiskunde. Ook op [www.curriculum.nu/rekenen-wiskunde](http://www.curriculum.nu/rekenen-wiskunde) kunt u een beeld krijgen hoe het leergebied Rekenen en Wiskunde samenhangt met andere leergebieden.



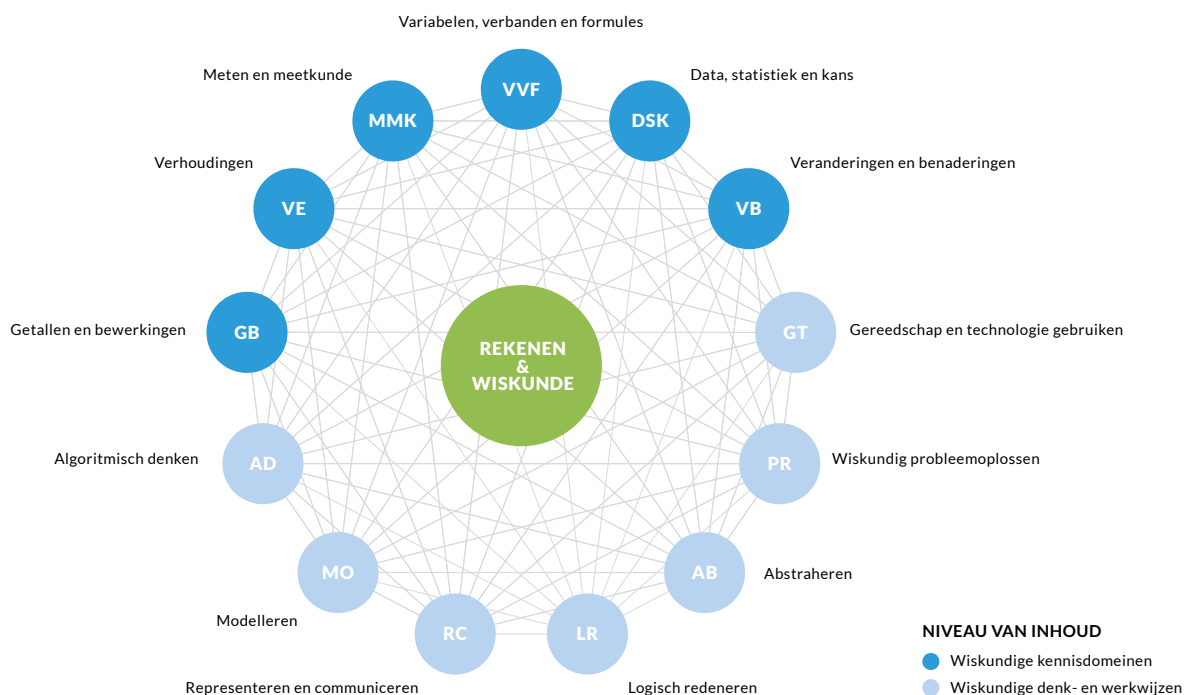
1.

## VOORSTEL VAN HET LEERGEBIED OP HOOFDLIJNEN

*Rekenen & Wiskunde zijn overal. De wereld om ons heen zit vol getallen, vormen, modellen en algoritmen. Onder andere door de technologie is de rol van Rekenen & Wiskunde in de samenleving de afgelopen jaren sterk veranderd. Getallen en getalbegrip vormen een belangrijke basis voor Rekenen & Wiskunde en veel andere leergebieden. Met goed getalbegrip kunnen leerlingen getallen begrijpen in hun context (1:20 kan een tijdstip of een schaalnotatie zijn). En ze snappen wanneer getallen in een context wel of niet kloppen en betrouwbaar zijn. Denk- en werkwijzen, zoals wiskundig probleemoplossen (hoeveel diagonalen heeft een regelmatige twintighoek?) en logisch redeneren (is iets dat groter is ook altijd zwaarder?) worden steeds belangrijker.*

## Wat we belangrijk vinden

Een doorlopende leerlijn van primair onderwijs tot en met alle sectoren van het voortgezet onderwijs is essentieel. Dat geldt ook voor een soepele doorstroom tussen de sectoren en naar het vervolgonderwijs. Dit zorgt ervoor dat hiaten en onnodige overlap worden voorkomen. Een uitdagend aanbod voor alle leerlingen is daarbij het doel. Rekenbewust vakonderwijs kan een manier zijn om Rekenen & Wiskunde in veel andere vakken toe te passen. Op deze manier krijgt het leergebied meer betekenis voor de leerlingen dan nu het geval is.



## Dit is het voorstel

### Wat blijft hetzelfde?

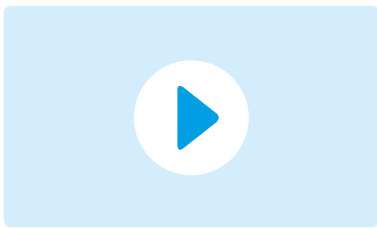
Leerlingen blijven een stevig fundament aan Rekenen & Wiskunde nodig hebben, zoals vakkennis (bijvoorbeeld de namen van ruimtelijke figuren), geautomatiseerde basisvaardigheden (bijvoorbeeld hoeveel centimeter is 3,5 meter?) en gememoriseerde basiskennis (bijvoorbeeld tafels).

### Wat verandert er?

Een aantal essentiële veranderingen maken het curriculum actueler en laten het meer aansluiten bij toekomstige ontwikkelingen:

- introductie van **statistiek** in het primair onderwijs. Omdat de hoeveelheid data en representaties steeds verder toeneemt, is het belangrijk dat leerlingen leren om gegevens (data te verzamelen, te verwerken, te representeren en hier conclusies aan te verbinden).

- gebruik van **wiskundegereedschappen en technologie**. Leerlingen leren doordacht en verantwoord gebruik maken van technologie en leren welke wiskunde er achter de technologie zit.
- een basis in **algebra en analyse** waarbij leerlingen diverse oplossingsstrategieën leren. Ze leren keuzes te maken wanneer welke strategie het meest effectief is. Ook is hier plek voor het gebruik van ICT.
- een steviger en samenhangend fundament voor **breuken, decimale getallen, verhoudingen en procenten**. In het primair onderwijs staat het begrijpen hiervan voorop. De formele rekenregels voor breuken volgen op een later moment. Zij krijgen een vervolg bij het herleiden van gebroken vormen en worden gebruikt bij berekening van kansen met behulp van kansregels.
- aandacht voor **wiskundige denk- en werkwijzen**: probleemoplossen, abstraheren, logisch redeneren, representeren en communiceren, modelleren, algoritmisch denken en gereedschappen en technologie gebruiken. Deze denk- en werkwijzen kunnen niet zonder inhoud. Zo sluiten de denk- en werkwijzen aan bij de brede vaardigheden en de (inter)nationale ontwikkelingen rondom Rekenen & Wiskunde.



[Bekijk hier een korte animatie van de opbrengsten Rekenen & Wiskunde](#)

## Schematisch overzicht van de grote opdrachten en de bouwstenen

		Primair onderwijs	Onderbouw voortgezet onderwijs
<b>1</b>	<b>Getallen en bewerkingen</b>		
<b>1.1</b>	<b>Getallen</b>	Leerlingen leren met inzicht om te gaan met hoeveelheden, de telrij, getallen en de structuur van het getalsysteem. Later breidt dit zich uit naar grote getallen, decimale getallen en breuken.	Leerlingen verdiepen hun inzicht, kennis en vaardigheden rond hele getallen, decimale getallen en breuken en leren rekenen met negatieve getallen, irrationale getallen en wortels.
<b>1.2</b>	<b>Bewerkingen</b>	Leerlingen leren optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met hele getallen, decimale getallen en benoemde breuken en deze toepassen in nieuwe situaties: in contexten en op formeel niveau.	Leerlingen leren bewerkingen uitvoeren met negatieve getallen, onbenoemde breuken, machten, wortels en irrationale getallen. Ze leren verschillende rekenstrategieën te gebruiken en uit te leggen.
<b>2</b>	<b>Verhoudingen</b>		
<b>2.1</b>	<b>Verhoudingen</b>	Leerlingen leren rekenen met kwalitatieve en kwantitatieve verhoudingen en leren verhoudingsproblemen op te lossen, ook met procenten en breuken. Ze gebruiken hierbij formele verhoudingstaal.	Leerlingen leren rekenen met complexe verhoudingsproblemen. Ze leren rekenen met exponentiële groei en redeneren over vergrotingsfactoren
<b>3</b>	<b>Meten en meetkunde</b>		
<b>3.1</b>	<b>Meten</b>	Leerlingen leren meten door het vergelijken en ordenen van grootheden: lengte, omtrek, oppervlakte, inhoud en tijd. Ze leren werken met meetinstrumenten en leren rekenen met maateenheden.	Leerlingen leren rekenen met complexe (samengestelde) grootheden. Ze breiden hun begrip, kennis en vaardigheden uit, o.a. met het meten van hoeken en het gebruik van nieuwe meetinstrumenten.
<b>3.2</b>	<b>Vorm en ruimte</b>	Leerlingen leren meetkundige begrippen en figuren herkennen, benoemen en gebruiken. Ze leren werken met plattegronden en dat meetkundige figuren objecten zijn waarvan de eigenschappen van belang zijn.	Leerlingen leren werken met coördinaten en redeneren over complexere ruimtelijke figuren op basis van symmetrie, gelijkvormigheid en congruentie.
<b>3.3</b>	<b>Rekenen in de meetkunde</b>	Leerlingen leren rekenen met en redeneren over omtrek, oppervlakte en inhoud en leren hierbij formules te gebruiken. Ze leren rekenen met het begrip vergrotingsfactor.	Leerlingen leren rekenen met lengtes, hoeken, oppervlakte en inhoud in complexere situaties en figuren.



4	<b>Variabelen, verbanden en formules</b>		
4.1	<b>Verbanden, verschijningsvormen en vergelijkingen</b>	Leerlingen leren verbanden tussen grootheden in eigen woorden te beschrijven. Ze leren woordformules op te stellen en deze via tabellen weer te geven in grafieken.	Leerlingen leren verschijningsvormen in elkaar om te zetten en gaan van woordformules naar formelere notaties. Ze leren vergelijkingen en ongelijkheden op te lossen: numeriek, grafisch, met ICT.
4.2	<b>Speciale verbanden</b>	Leerlingen leren dat er naast de vaste toe- of afname ook andere soorten regelmaat bestaan. Ze leren deze patronen in eigen woorden te beschrijven, voort te zetten en in een tabel te noteren.	Leerlingen leren werken met meer speciale verbanden op formeler niveau. Ze maken kennis met de formules, grafieken en eigenschappen van deze speciale verbanden.
5	<b>Data, statistiek en kans</b>		
5.1	<b>Kansen en kansverdelingen</b>	Leerlingen leren wat het begrip 'kans' inhoudt, doen ervaringen op met kansexperimenten en maken kennis met combinatoriek.	Leerlingen leren dat een kans de verhouding is tussen het aantal gunstige mogelijkheden en het totaal aantal mogelijkheden en leren hiermee rekenen. Kansexperimenten nemen toe in complexiteit.
5.2	<b>Data en statistiek</b>	Leerlingen leren het nut van gegevens ordenen en deze weer te geven in grafische representaties en hiermee te rekenen. Ze ontwikkelen een kritische houding ten opzichte van data en conclusies.	Leerlingen leren trends te herkennen en voorspellingen te doen aan de hand van complexere en formelere grafische representaties. Ze maken kennis met het kwantificeren van onzekerheid.
6	<b>Veranderingen en benaderingen</b>		
6.1	<b>Veranderingen</b>	Leerlingen leren voorbeelden te geven van veranderingen en uit te leggen wat het betekent als aantallen toe- of afnemen. Ze leren uit representaties te bepalen welke verandering zichtbaar is.	Leerlingen krijgen zicht op de betekenis en weergave van de verandering van een verband.
6.2	<b>Benaderingen</b>	Leerlingen leren schatten en benaderen in concrete situaties. Ze leren redeneren over nauwkeurigheid, orde van grootte en marges.	Leerlingen leren wiskundige technieken om veranderingen te begrijpen en te bepalen: benaderen, inklemmen, interpoleren en extrapoleren.
7	<b>Gereedschap en technologie gebruiken</b>		
7.1	<b>Gereedschap en technologie gebruiken</b>	Leerlingen leren gereedschappen en technologie op een doordachte en verantwoorde manier in te zetten om het rekenen te verlichten.	Leerlingen maken kennis met meer gereedschappen en technologie. Het gaat hierbij ook om een doordacht en verantwoord gebruik en de wiskunde achter de gereedschappen en de technologie.

8	Wiskundig probleemoplossen		
8.1	<b>Wiskundig probleemoplossen</b>	Leerlingen leren problemen te analyseren en eerst handelend, en later op formelere wijze op te lossen. Ze gebruiken daarbij heuristieken.	Leerlingen leren problemen op een meer formele manier op te lossen en zijn in staat heuristieken in combinatie te gebruiken bij het oplossen van complexere problemen.
9	Abstraheren		
9.1	<b>Abstraheren</b>	Leerlingen leren getallen en meetkundige vormen te abstraheren tot denkobjecten. Ze leren samenhang tussen breuken, procenten, decimale getallen en schaal te abstraheren tot 'verhouding'.	Leerlingen leren dat breuken zelfstandige getallen zijn en dat je een variabele door een getal kunt vervangen. Ze leren samenhang tussen formules, grafieken en tabellen te abstraheren tot 'verband'.
10	Logisch redeneren		
10.1	<b>Logisch redeneren</b>	Leerlingen leren beweringen te begrijpen en te staven aan de werkelijkheid of te weerleggen. Redeneringen zijn voornamelijk inductief. De redeneerwijze wordt steeds formeler.	Leerlingen leren complexere redeneringen te geven: meer redeneerstappen op basis van kennis en inzicht uit verschillende inhoudsdomeinen. Ook leren ze deductieve redeneringen te geven.
11	Representeren en communiceren		
11.1	<b>Representeren en communiceren</b>	Leerlingen leren getallen en meetkundige figuren te representeren in woord, beeld en symbool en die te gebruiken. Later worden representaties en gebruik daarvan formeler van karakter.	Leerlingen leren formele wiskundetaal gebruiken en kritisch te zijn op onjuist gebruik hiervan.
12	Modelleren		
12.1	<b>Modelleren</b>	Leerlingen leren een situatie met behulp van schematische voorstellingen te beschrijven. Ze leren te beoordelen of een voorstelling een situatie goed beschrijft.	Leerlingen leren wiskundige modellen met variabelen en formules te maken en te beoordelen en hiermee te rekenen en te redeneren. Ook kansmodellen en tekeningen met meetkundige symbolen doen hun intrede.
13	Algoritmisch denken		
13.1	<b>Algoritmisch denken</b>	Leerlingen leren dat vaste volgorde van instructies soms nodig zijn en leren algoritmen uit te voeren. Later leren ze zelf algoritmen schrijven, bijvoorbeeld voor cijferprocedures.	Leerlingen leren gebruik te maken van structuren (opvolging, herhaling, keuze, variabelen) die in een algoritme kunnen staan. Ze maken kennis met hoe instellingen en bedrijven algoritmen gebruiken.



2.

## VISIE OP HET LEERGEBIED

*Dit document beschrijft de visie op het leergebied van het ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde. Het is tot stand gekomen op basis van literatuurstudie, gesprekken met docenten en experts, eigen ervaringen en inzichten van de leden van het team en participatie in Curriculum.nu.*

*Deze visie kent een inleiding waar we ingaan op redeneren om een nieuw curriculum te ontwikkelen. Vervolgens staan we stil bij de relevantie van het leergebied, de inhoud van het leergebied en de positie van het leergebied binnen het curriculum. In een apart document worden van stellingnamen onderbouwingen gegeven.*

# Redeneren om een nieuw curriculum te ontwikkelen

Het project Curriculum.nu heeft tot doel veranderingen door te voeren in de curricula van negen leergebieden met het oog op doorlopende leerlijnen, samenhang in het curriculum en toekomstbestendig onderwijs. Voor het leergebied Rekenen & Wiskunde is er daarnaast een aantal andere redeneren het curriculum van de verschillende reken- en wiskundevakken en -varianten te verbeteren:

## Veranderingen in de wereld, de samenleving, de beroepspraktijk en technologie

Er zijn veel verschijnselen en ontwikkelingen waar te nemen die van invloed zijn op het curriculum van het leergebied Rekenen & Wiskunde. Te denken valt onder andere aan:

- beschikbaarheid van grote hoeveelheden gegevens en
- gebruik en ontwikkeling van informatie- en communicatietechnologie.

Deze verschijnselen maken dat de rol van wiskunde in de samenleving verandert. Meer mensen dan vroeger komen - soms onbewust - in aanraking met Rekenen & Wiskunde, maar wel op een andere manier en met andere reken- en wiskundeonderwerpen dan in het verleden.

## Dalend beheersingsniveau van vooral betere leerlingen

Uit internationale vergelijkingsonderzoeken als TIMSS en PISA valt te concluderen dat onze leerlingen aan de onderkant van het spectrum bovengemiddeld goede scores behalen, maar dat de groep betere leerlingen in primair en voortgezet onderwijs steeds meer achteropraakt bij andere landen. Dat vinden we een zorgwekkende ontwikkeling.

## Manco's in doorlopende leerlijnen

Door vele kleine tussentijdse wijzigingen van het curriculum uit het verleden is de aansluiting tussen voor- en vervolgopleidingen op sommige plekken niet meer optimaal, te denken valt aan de doorstroom van vmbo-gt naar havo. Bovendien bestaat er behoefte aan nieuwe doorstroommogelijkheden, bijvoorbeeld van vmbo-bb naar vmbo-kb. Het stapel- of lineaire karakter van wiskunde maakt dat aansluitingsproblemen in het onderwijs niet eenvoudig op te vangen zijn. Een ander punt van zorg is dat bepaalde basiskennis en -vaardigheden onvoldoende op peil zijn door te weinig aandacht voor automatiseren, voor memoriseren en voor onderhoud. Ook hier geldt dat het stapelkarakter van het leergebied voor problemen zorgt als basiskennis en -vaardigheden niet op orde zijn.

## Gebrek aan samenhang en afstemming

We zien hier dat nieuwe concepten soms eerder en anders in andere vakken geïntroduceerd worden dan bij wiskunde en dat transfer van wiskundekennis en -vaardigheid naar andere vakken problematisch is, denk bijvoorbeeld aan procentberekeningen. Sommige leerlingen maken geheel ten onrechte onderscheid tussen 'wiskundeprocenten' en 'economiprocenten'. Het opzetten van een nieuw curriculum in samenhang met andere vakgebieden biedt een mooie kans om de afstemming en samenhang te versterken waarbij Rekenen & Wiskunde een verbindende, faciliterende rol vervult.

## Gebrek aan motivatie onder leerlingen

Uit internationale vergelijkingsonderzoeken blijkt dat de motivatie van Nederlandse leerlingen om op school wiskunde te leren laag is in vergelijking met andere landen. Veel leerlingen vragen zich af waar wiskunde toe dient en wat je er mee kunt. Een betekenisvoller curriculum moet hier verandering in kunnen aanbrengen.

# Relevantie

## Rekenen & Wiskunde in de samenleving

Rekenen & Wiskunde zijn funderend en dragend voor steeds meer aspecten van beroep en burgerschap. Wiskunde is zelden direct zichtbaar, maar overall aanwezig. Daar waar sprake is van structureren, ontwerpen, modelleren en rekenen, worden Rekenen & Wiskunde gebruikt om objecten en processen te beschrijven en te verklaren. Brede vaardigheden als kritisch en probleemoplossend denken en communiceren komen nationaal en internationaal steeds meer centraal te staan.

Door de mogelijkheden die de technologie ons biedt, verandert de wijze waarop Rekenen & Wiskunde bedreven wordt: buiten het onderwijs heeft technologie het formele rekenen voor een groot deel overgenomen. Denk- en werkwijzen van diverse wetenschappen (zoals technische-, gedrags- en gezondheidswetenschappen) zijn gebaseerd op wiskunde. Apps en protocollen met aanbevelingen gebaseerd op data, sturen steeds vaker het handelen en het verantwoorden (bijvoorbeeld het voorschrijven van medicijnen en verantwoording van de onderwijsopbrengsten van een school). Deze toenemende hoeveelheid data en feiten in combinatie met de invloed van de (sociale) media vereisen een kritische houding en meer kennis van en inzicht in de statistiek.

Het leergebied Rekenen & Wiskunde kan vanuit verschillende invalshoeken<sup>1</sup> beschouwd worden. De functionele invalshoek richt zich op het gebruik van wiskunde om meer gecijferd (om adequaat en autonoom om te gaan met de kwantitatieve kant van de wereld om je heen) te worden. Hieronder vallen onder andere financiële geletterdheid, factchecking en het gebruik van technologie. Bij de formele invalshoek wordt wiskunde beschouwd als een zelfstandig formeel-deductief systeem met axioma's<sup>2</sup>, stellingen en standaardprocedures. Om wiskunde op een bepaald niveau functioneel te kunnen gebruiken is een passend beheersingsniveau van formele wiskunde noodzakelijk. Doordat ICT zich verder ontwikkelt en meer gebruiksmogelijkheden biedt, zien we evenwel dat functioneel gebruik van wiskunde minder afhankelijk wordt van beheersing van formele wiskunde. Maar zonder beheersing van formele wiskunde is functioneel gebruik amper mogelijk. Dit is onder andere nodig om keuzes te kunnen maken voor gereedschappen, in te kunnen schatten of digitale berekeningen goed gemaakt zijn en te kunnen schatten en benaderen. Leerlingen leren Rekenen & Wiskunde door zich tot hun niveau te ontwikkelen in formele wiskunde én door te leren die functioneel te gebruiken.

## Inhoud

### Doelen van het onderwijs in Rekenen & Wiskunde

Het leergebied Rekenen & Wiskunde draagt evenals de andere leergebieden bij aan realisatie van de hoofdoelen van onderwijs: kwalificatie, socialisatie en persoonsvorming. Bij persoonsvorming valt te denken aan het vermogen analytisch te denken en de reële wereld vanuit wiskundig perspectief te beschouwen. Functioneel gebruik van wiskunde richt zich op elk van de drie hoofdoelen. Formele wiskunde richt zich met name op kwalificatie en persoonsvorming. In beroep en samenleving wordt wiskunde door de meerderheid van de bevolking functioneel gebruikt.

<sup>1</sup> We noemen hier het functioneel gebruik van wiskunde en de formele wiskunde. Leerlingen kunnen deze invalshoeken vanuit verschillende didactische benaderingen leren. Het onderscheid tussen functionele en formele wiskunde staat los van deze benaderingen; met elke didactische benadering kan functioneel gebruik van wiskunde en/of formele wiskunde aangeleerd worden.

<sup>2</sup> Een axioma is een uitgangspunt waarvan verondersteld wordt dat ze waar is en van waaruit het formeel-deductief systeem van de wiskunde wordt opgebouwd.

Op basis hiervan stellen we dat:

- alle leerlingen zich op hun eigen niveau dienen te bekwamen in het functioneel gebruik van wiskunde;
- alle leerlingen de formele wiskunde dienen te beheersen die nodig is om het bovenstaande te realiseren;
- leerlingen die meer formele wiskunde aankunnen, in de gelegenheid gesteld dienen te worden om zich hierin verder te bekwamen.

Als gevolg van deze stellingname en van wat in het voorgaande beschreven is, richt het leergebied zich op:

- verwerving van wiskundige basiskennis en -vaardigheid ('het fundament');
- verwerving van kennis van en inzicht in wiskundige concepten uit de kennisdomeinen Getallen en bewerkingen, Verhoudingen, Meten en meetkunde, Variabelen, verbanden en formules, Data, statistiek en kans en Veranderingen en benaderingen;
- verwerving van wiskundige denk- en werkwijzen: Gereedschap en technologie gebruiken, Wiskundig probleemoplossen, Abstraheren, Logisch redeneren, Representeren en communiceren, Modelleren en Algoritmisch denken.

Alle leerlingen worden hierin onderwezen, ook als ze geen eindexamen wiskunde afleggen.

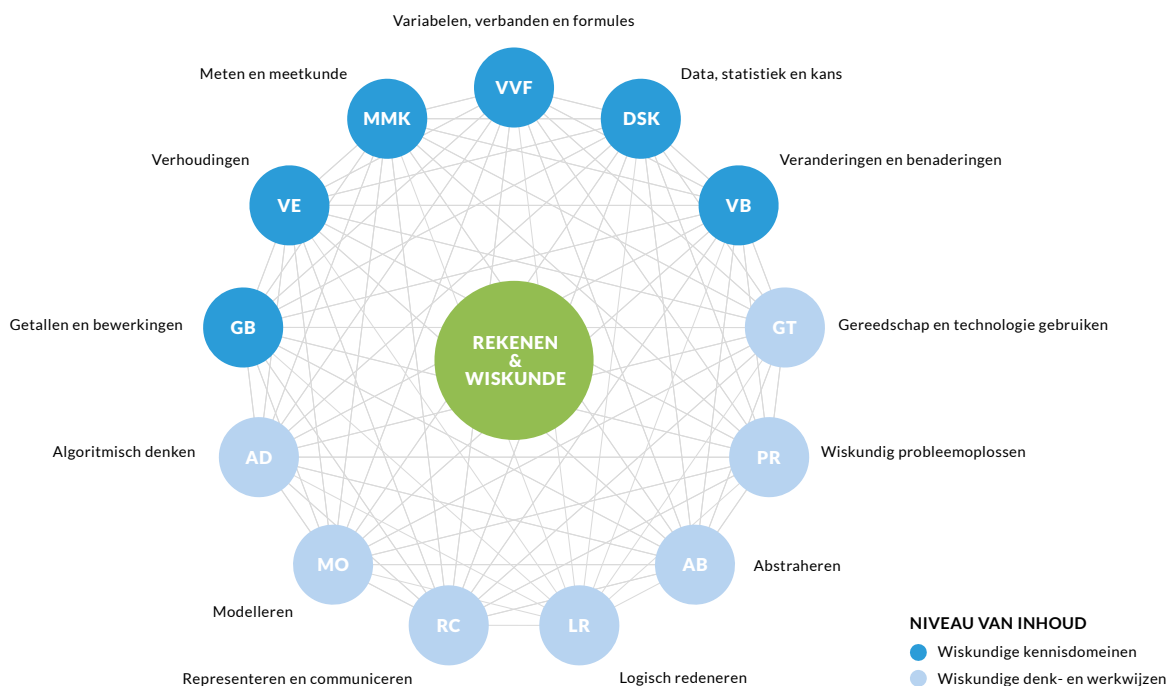
Via de wiskundige denk- en werkwijzen ontwikkelen leerlingen brede vaardigheden als creatief denken, kritisch denken en zelfregulatie. De wiskundige denk- en werkwijzen vormen als het ware een wiskundige inkleuring van deze brede vaardigheden. Deze kunnen niet aangeleerd worden zonder reken-wiskunde inhoud. Wij denken dat in het curriculum van Rekenen & Wiskunde zo invulling gegeven wordt aan de brede vaardigheden.

Curriculum.nu onderscheidt verder een viertal mondiale thema's: globalisering, duurzaamheid, technologie en gezondheid. Van deze thema's komt Technologie binnen het leergebied Rekenen & Wiskunde expliciet aan bod. De andere thema's kunnen als context dienen voor functionele wiskunde, maar kennen geen specifieke wiskundige invulling.

Zodoende kent een nieuw curriculum Rekenen & Wiskunde een duidelijk fundament, leidt het ertoe dat leerlingen de wereld vanuit een wiskundeperspectief leren te bekijken, draagt het bij aan het transfervermogen van leerlingen naar andere leergebieden, staat het maatwerk en differentiatie niet in de weg en verschaft het leerlingen plezier met Rekenen & Wiskunde.

## Leerinhouden Rekenen & Wiskunde

Het curriculum van het leergebied Rekenen & Wiskunde kent leerinhouden die bestaan uit wiskundige kennis en wiskundige denk- en werkwijzen. De wiskundige denk- en werkwijzen worden toegepast op die wiskundige kennis. Deze wiskundige kennis is op zijn beurt ingedeeld in kennisdomeinen. Deze interne samenhang van het leergebied wordt verbeeld in figuur 1, die we het Wiskundeweb genoemd hebben. De interne samenhang van het leergebied heeft betrekking op samenhang tussen de kennisdomeinen onderling, samenhang tussen de denk- en werkwijzen onderling en samenhang tussen de kennisdomeinen en de denk- en werkwijzen. In de Toelichting wordt deze interne samenhang geïllustreerd aan de hand van enkele 'uitgewerkte voorbeelden'.



figuur 1: Interne samenhang in het leergebied Rekenen & Wiskunde

Alle leerlingen krijgen Rekenen & Wiskunde aangeboden van een niveau dat bij elk van hen past en hen voldoende uitdaagt. Daarmee willen we bereiken dat leerlingen gemotiveerder raken voor het leergebied, leerlingen meer naar hun potentie gaan presteren en dat hun transfervermogen (toepassen van Rekenen & Wiskunde binnen en buiten het leergebied) zich ontwikkelt. Om vroege determinatie van leerlingen voor een vervolgopleiding te voorkomen, worden in het primair onderwijs alle relevante inhoud, zowel kennis als denk- en werkwijzen, aangeboden aan alle leerlingen. Differentiatie kan daar plaatsvinden op bijvoorbeeld complexiteit en/of niveau van denken en handelen. In de onderbouw van het voortgezet onderwijs zal er sprake zijn van differentiatie op inhoud, niet in de laatste plaats omdat de onderbouw van havo en vwo een leerjaar meer omvat dan in het vmbo. Verder zal - aansluitend bij de potentie van leerlingen - het reken- en wiskundeonderwijs in havo en vwo meer formeel van karakter zijn en in het vmbo meer functioneel<sup>3</sup>.

## Positie

Het leergebied Rekenen & Wiskunde kent een aantal kenmerken die specifiek zijn voor het leergebied en die consequenties hebben voor het curriculum:

### Lineair karakter van wiskunde

Wiskunde is een lineair of stapelvak. Als iemand iets niet beheerst, dan kan hij dat wat daarop volgt niet leren. Dat heeft als consequentie dat er voldoende aandacht moet zijn voor automatiseren en memoriseren van basiskennis en -vaardigheden. Bovendien moeten basiskennis en -vaardigheden onderhouden worden.

<sup>3</sup> Voor (in potentie) beter presterende leerlingen valt verder te denken aan ontwikkeling van extra referentieniveaus, aan het vmbo-vak wiskunde plus en aan wiskunde D in havo en vwo.

### **Doorlopende leer en 'opstroomlijnen'**

In het leergebied kunnen doorlopende leerlijnen en 'opstroomlijnen' onderscheiden worden. In de huidige situatie valt het begin of het einde van een leerlijn soms samen met de overgang van primair naar voortgezet onderwijs. Dit is een ongewenste situatie, die opgelost wordt door middel van 'zwaluwstaarten': een onderwerp uit het voortgezet onderwijs wordt al geïntroduceerd in het primair onderwijs, of: een onderwerp dat nu in het primair onderwijs afgesloten wordt, krijgt een (kleine) doorloop in het voortgezet onderwijs. Naast zwaluwstaarten draagt gebruik van dezelfde vaktaal in primair en voortgezet onderwijs bij aan de verbetering van doorlopende leer- en 'opstroomlijnen'.

### **Reken- en wiskundebewust vakonderwijs**

Leerlingen verwerven wiskundekennis en wiskundige denk- werkwijzen in de wiskundeles en gebruiken die daarbuiten functioneel, bijvoorbeeld bij andere leergebieden. Andere leergebieden kunnen contexten leveren waarin wiskundige denk- en werkwijzen geleerd en toegepast kunnen worden. Om dit te realiseren is het nodig dat wiskunde-inhouden aangeleerd worden voordat andere vakken ze gebruiken.

Afstemming op scholen hieromtrent is van belang. We zijn ons ervan bewust dat dit reken- en wiskundebewust vakonderwijs verder reikt dan alleen het curriculum, denk bijvoorbeeld aan afstemming tussen en professionalisering van leraren, maar we menen dat deze invulling van samenhang met andere leergebieden veelbelovend is.

### **De rol van informatie- en communicatietechnologie (ICT)**

Ten slotte zijn er digitale toepassingen die veel wiskundig handwerk over kunnen nemen. Dit heeft gevolgen voor het soort Rekenen & Wiskunde dat leerlingen leren. Leerlingen kunnen conceptuele kennis verwerven zonder dat direct in verband te hoeven brengen met procedurele kennis. Te denken valt aan begripsvorming met betrekking tot breuken zonder direct breukbewerkingen te behandelen. Het is belangrijk dat hierdoor geen hiaten in de leer- en opstroomlijnen ontstaan.





3.

## GROTE OPDRACHTEN

# Grote opdracht 1: Getallen en bewerkingen

## Relevantie

Getallen en bewerkingen vormen een belangrijk fundament in een wereld vol getallen, zoals in de winkel en de media. Inzicht en kennis hebben in getallen en bewerkingen en ermee kunnen werken en handelen is van belang. Getalbegrip en het begrijpen en kunnen uitvoeren van bewerkingen zijn noodzakelijk om te kunnen functioneren in beroep en de maatschappij (gecijferdheid). Ook al nemen digitale hulpmiddelen steeds meer rekenwerk over, goed kunnen omgaan met getallen en bewerkingen blijft belangrijk. Getallen en bewerkingen vormen de basis voor de overige inhoud van het leergebied en voor andere leergebieden. Dit is een illustratie van het funderende en dragende karakter van Rekenen & Wiskunde. Verder dient exact rekenen ook ter voorbereiding op de algebra en vormt het een eerste stap in de ontwikkeling van formele wiskunde.

## Inhoud

Getallen hebben verschillende betekenissen en functies, zij kunnen namen (buslijn 7), nummers en hoeveelheden (aantallen of maten, zoals het suikergehalte in etenswaren) aanduiden. Kennis en begrip van getallen en van hoeveelheden is de noodzakelijke basis voor het leren rekenen. Naast begrip van eigenschappen van bewerkingen op zich is het essentieel dat leerlingen ook de samenhang tussen bewerkingen begrijpen. Leerlingen ontwikkelen vaardigheid in het uitvoeren van bewerkingen volgens vaste of meer flexibele procedures met bijbehorende vaktaal. Zo werken ze aan een stevig fundament van geautomatiseerde basisvaardigheden en gememoriseerde basiskennis. Schattend rekenen ondersteunt verder wiskundige ontwikkeling en redzaamheid: ter controle en als (digitale) hulpmiddelen even niet beschikbaar zijn.

# Grote opdracht 2: Verhoudingen

## Relevantie

Denken in en omgaan met verhoudingen speelt een belangrijke rol in de maatschappij. In de media lezen we over bijvoorbeeld de verhouding privé/werk en de stijging van prijzen met 2%. In het dagelijks leven gebruiken we verhoudingen bij bijvoorbeeld een schaalmodel maken met een 3D-printer, bij het uitrekenen van de nieuwe prijs met bijvoorbeeld 35% korting en bij het omrekenen van recepten. Ook voor het kunnen rekenen met samengestelde grootheden als snelheid in km/uur, bij kansen en bij exponentiële verbanden is een goed begrip van verhoudingen noodzakelijk.

## Inhoud

Bij verhoudingen is er sprake van grootheden die ten opzichte van elkaar in verhouding vergeleken worden. Verhoudingssituaties kunnen kwalitatief zijn, zoals in de zin van: 'Mijn vader heeft grotere voeten dan ik, maar naar verhouding heb ik grotere voeten dan hij', of kwantitatief. Leerlingen leren verschillende representaties van verhoudingen en verhoudingssituaties: verhoudingstaal, een percentage, schaalnotatie, verhoudingstabel en een breuk (1 van de 4 mensen, 25%,  $1 : 4$  en  $\frac{1}{4}$ ). Dit vormt een samenhangend fundament voor breuken, percentages, schaal en verhoudingen. Leerlingen moeten beschikken over begrip en kennis van verhoudingen en ermee kunnen rekenen. Daarnaast leren ze dat digitale technologie het oplossen van verhoudingsproblemen kan ondersteunen en vergemakkelijken.

## Grote opdracht 3: Meten en meetkunde

### Relevantie

Het herkennen, verklaren en beschrijven van situaties in de ruimte om ons heen (bijvoorbeeld routebeschrijvingen, spiegelbeeld) hoort tot de meetkunde. Maten, ruimte en vormen maken al sinds de oudheid deel uit van onze wereld en zijn nu nog steeds relevant: van de technische sector en de creatieve industrie tot in het persoonlijk leven (past deze kast in mijn slaapkamer?). Begrip van en vaardigheid in meten, het construeren van vormen en figuren en hieraan te rekenen volgens vaste of meer flexibele procedures is van belang. Deze kennis zal bijdragen aan een verdere wiskundige ontwikkeling en aan socialisatie.

### Inhoud

Bij meten ontwikkelen leerlingen een gevoel voor grootte en omvang. Meten gaat over grootheden als lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht, temperatuur en tijd en over meeteenheden. Leerlingen ontwikkelen een gevoel voor grootte en omvang en leren rekenen met eenheden door gebruik te maken van het metriek stelsel. Leerlingen leren vormen en eigenschappen van vormen te benoemen. Zij gebruiken die om ermee te redeneren en te rekenen. Bijvoorbeeld bij het berekenen van de oppervlakte van een vlakke figuur, de afstand tussen twee punten in de ruimte of bij hoeken.

# Grote opdracht 4:

## Variabelen, verbanden en formules

### Relevantie

In veel leergebieden en ook in de samenleving komen grootheden voor die met elkaar samenhangen. Een dergelijke samenhang heet in de wiskunde een verband of een functie. De verschillende representaties waarin verbanden kunnen worden weergegeven, worden internationaal begrepen en gebruikt en komen voor in de media en andere leergebieden. Kennis van representaties van verbanden en van verbanden met specifieke eigenschappen is daarom noodzakelijk. Dit illustreert het funderende en dragende karakter van Rekenen & Wiskunde.

### Inhoud

Bij verbanden gaat het om de wijze waarop grootheden met elkaar samenhangen. Wanneer bijvoorbeeld de kosten over meer mensen verdeeld worden, neemt het te betalen bedrag per persoon af. Het is van belang dat leerlingen leren verschillende soorten verbanden te herkennen, ermee te rekenen en weer te geven in een (woord)formule met variabelen, tabellen en/of grafische voorstellingen. Aan bod komen het begrip van variabelen en het herleiden van formules, verbanden kunnen representeren, en met behulp hiervan kunnen redeneren en communiceren. Bij het werken met tabellen, formules en grafieken wordt, waar dit zinvol en van meerwaarde is, digitale technologie ingezet.

# Grote opdracht 5: Data, statistiek en kans

## Relevantie

Het vermogen van mensen om gegevens te ordenen, te verwerken en (grafische) representaties hiervan te begrijpen is van groot belang in een maatschappij waarin grote hoeveelheden gegevens beschikbaar zijn en snel, eenvoudig en met een kleine kans op fouten, verwerkt kunnen worden met digitale hulpmiddelen. De informatie die zo beschikbaar komt is niet altijd overeenkomstig met de werkelijkheid; dat maakt een kritische houding (fact-checking) noodzakelijk. (Bewuste) misleiding ligt op de loer met bijvoorbeeld grafieken die een vertekend beeld schetsen, omdat er een deel van de informatie niet zichtbaar is.

## Inhoud

Data en statistiek gaat over het verzamelen, verwerken, juist interpreteren en representeren van gegevens en er betrouwbare conclusies aan verbinden. Om grip te krijgen op betrouwbaarheid, onzekerheid en toeval is er kansrekening. Hiermee kunnen we bepalen welke uitkomsten mogelijk zijn en hoe waarschijnlijk deze zijn. Leerlingen leren talige en cijfermatige informatie en representaties op de juiste waarde te schatten en op waarheidsgehalte te checken. Om hier een gevoel bij te krijgen, leren leerlingen daaraan voorafgaand eerst met kleine datasets centrum- en spreidingsmaten (gemiddelde, mediaan) handmatig te berekenen en daar conclusies aan te verbinden.

# Grote opdracht 6: Veranderingen en benaderingen

## Relevantie

We hebben in de wereld te maken met verschillende ingrijpende veranderingen, zoals de veranderende migratiestromen en klimaatverandering. Om in complexe situaties veranderingen te analyseren en door te rekenen zijn er wiskundige technieken beschikbaar, die soms ook veranderingen kunnen voorspellen. In eenvoudige gevallen zijn deze technieken met pen en papier uit te voeren met exacte uitkomsten als resultaat. Digitale hulpmiddelen geven in veel gevallen een benadering van een uitkomst. Deze benadering is vaak zo nauwkeurig dat het verschil met een exacte uitkomst nauwelijks waar te nemen is.

## Inhoud

Technieken om veranderingen te analyseren zijn toenamedigrammen en differentiaalrekening. Benaderingstechnieken zijn schatten en afronden, interpoleren (wanneer had Nederland ongeveer 8 miljoen inwoners?), extrapoleren (wanneer heeft Nederland 20 miljoen inwoners?) en inklemmen. Ook kent numerieke wiskunde (het onderdeel van wiskunde dat zich bezighoudt met benaderend rekenen) talrijke benaderingstechnieken. Met schattingen en benaderingen zijn antwoorden te vinden op praktische vragen (heb ik genoeg saldo om deze boodschappen te pinnen?) en complexe problemen waarin je aannamen moet doen (investeer ik in zonnepanelen?). Leerlingen leren (zonder en met digitale hulpmiddelen) wiskundige technieken toe te passen voor schattingen en benaderingen. Daarbij is (enige) kennis van numerieke wiskunde van belang. Te denken valt hierbij aan het effect van (tussentijdse) afrondingen en van meetfouten.

# Grote opdracht 7: Gereedschap en technologie gebruiken

## Relevantie

ICT is niet meer weg te denken in de moderne maatschappij. Het biedt gereedschap om wiskundig handwerk snel en nauwkeurig te verrichten en om wiskundige vraagstukken te onderzoeken, denk bijvoorbeeld aan het gebruik van navigatiesystemen of spreadsheets. Het is verder van belang dat leerlingen beseffen dat de werking van digitale hulpmiddelen gebaseerd is op wiskunde.

## Inhoud

Het gaat in eerste instantie om doordacht en verantwoord gebruik van gereedschappen, zoals het kiezen voor het al dan niet gebruiken van digitale hulpmiddelen (bijvoorbeeld een rekenmachine, een digitaal tekenprogramma) in bepaalde situaties. Ook het gebruik van passer, liniaal en gradenboog valt onder deze grote opdracht. Om te beseffen dat de werking van digitale hulpmiddelen op wiskunde gebaseerd is, leren leerlingen welke wiskunde in een hulpmiddel toegepast wordt (bijvoorbeeld weten dat je een hoekpunt onder  $45^\circ$  moet verschuiven als je een digitale afbeelding wilt vergroten en de verhoudingen hetzelfde moeten blijven, weten hoe een mobiele telefoon de locatie bepaalt).

## Brede vaardigheden

Creatief denken en handelen (is er een passend gereedschap voorhanden? welke technologie zal ik kiezen?); probleemoplossend denken en handelen (bij welke stappen in de oplossingsstrategie kan ICT van toegevoegde waarde zijn?); kritisch denken (zijn de uitkomsten van dit digitale gereedschap betrouwbaar?).



# Grote opdracht 8: Wiskundig probleemoplossen

## Relevantie

Probleemoplossen is binnen en buiten de wiskunde een belangrijke vaardigheid. Bij allerlei maatschappelijke vraagstukken (zoals klimaatverandering) en in persoonlijke situaties (bijvoorbeeld financiële planning) is wiskunde nodig om oplossingen van problemen te kunnen vinden en zo onderbouwde keuzes te kunnen maken. Wiskundig probleemoplossen draagt bij aan de ontwikkeling van wiskundig inzicht en van analytisch en creatief denken.

## Inhoud

Bij wiskundig probleemoplossen gaat het om toepassen van reken-wiskundige (basis)kennis en vaardigheden, het gebruiken van vuistregels en ervaring (heuristieken) en soms ook om wiskundig modelleren. Kenmerkend voor een probleem is dat het voor de oplosser niet direct duidelijk is hoe het kan worden opgelost. Dit kenmerk is relatief: wat voor de een een probleem is, kan voor een ander een routinematig oplosbaar vraagstuk zijn. Bovendien kan wat eerst een probleem vormt voor iemand, na verloop van tijd routinematig oplosbaar zijn. Wiskundig probleemoplossen vraagt om een analyse van de probleemstelling, ontwikkeling van een oplossingsstrategie en de uitvoering daarvan. Vervolgens om aan de hand van de uitkomsten daarvan een oplossing te geven en te controleren of die past bij de probleemstelling. Wiskundig probleemoplossen gaat over problemen in de wiskunde zelf én over toepassingsproblemen, al dan niet uit andere leergebieden.

## Brede vaardigheden

Probleemoplossend denken en handelen; creatief denken en handelen (hoe kan dit probleem worden aangepakt?); kritisch denken (klopt mijn aanpak?); en zelfregulering (voer ik mijn strategie correct en volgens plan uit?)

# Grote opdracht 9: Abstraheren

## Relevantie

Met abstraheren bouwt een leerling aan zijn vermogen om objecten en bewerkingen te abstraheren tot denkobjecten: bijvoorbeeld een getal niet meer te zien als een hoeveelheid of een aantal, maar als een entiteit die voor hem zelfstandig betekenis heeft. Dingen die voor hem eerst alleen maar betekenis hebben in een bepaalde concrete situatie, krijgen zelfstandig betekenis en vormen daarmee vervolgens een nieuw niveau van concreetheid. Daarom vormt abstraheren een belangrijk mechanisme bij verwerving van formele wiskunde en draagt het bij aan de verder ontwikkeling van het analytisch denken van de leerling.

## Inhoud

Het gaat erom dat de leerling uit concrete situaties overeenkomsten en verschillen filtert, die vervolgens leiden tot de vorming van (wiskundige) denkobjecten in het hoofd van de leerling die voor hem zelfstandig betekenis krijgen. We zien dat leerlingen in dat geval praten over getallen of vormen of verbanden en ermee handelen, zonder terug te hoeven grijpen op hoeveelheden of een context. Het accent verschuift zo van werken in concrete contexten naar het inzicht in en redeneren met de (wiskundige) denkobjecten die daarin een rol spelen en waarbij de leerling zich opnieuw wat kan voorstellen. Op deze manier ontwikkelt een leerling zich in de formele wiskunde.

## Brede vaardigheden

Oriëntatie op jezelf, je studie en je loopbaan (welke loopbaankeuzes maak ik als blijkt dat ik goed of niet goed kan abstraheren?).

# Grote opdracht 10: Logisch redeneren

## Relevantie

Logisch redeneren is binnen en buiten Rekenen & Wiskunde een belangrijke vaardigheid. Veel situaties in een beroep, de samenleving of het leergebied zelf vragen om het kunnen volgen of geven van een logische redenering en het kunnen herkennen van redeneerfouten, zoals drogredeneringen en misleidende redeneringen.

## Inhoud

Logisch redeneren binnen Rekenen & Wiskunde gaat over beweringen, stellingen, eigenschappen, het aantonen of weerleggen daarvan en over het opsporen van redeneerfouten of drogredeneren. Ook het uiten van vermoedens of iets altijd geldt of niet, valt onder deze grote opdracht. Met een logische redenering kan worden aangetoond of een bewering of stelling waar is of niet (waarom is het zo dat de som van twee oneven getallen altijd een even uitkomst heeft?). In een dergelijke redenering kunnen redeneerprincipes (zoals 'een bewijs uit het ongerijmde'), eigenschappen, stellingen en definities worden gebruikt.

## Brede vaardigheden

Creatief denken en handelen (met welke redeneerstappen kan ik aantonen dat het (niet) klopt?); kritisch denken (klopt mijn redenering?); zelfregulering (mijn redeneerproces aansturen, reguleren en evalueren; volhardend zijn).

# Grote opdracht 11: Representeren en communiceren

## Relevantie

Rekenen & Wiskunde maakt gebruik van een universele vaktaal. Begrippen, benamingen, symbolen en formules worden wereldwijd gebruikt. Deze representaties helpen om wiskundig denken en wiskundig handelen tot uitdrukking te brengen en erover te communiceren met anderen, zowel met wiskundigen als met niet-wiskundigen.

## Inhoud

Bij het leren van Rekenen & Wiskunde maken leerlingen kennis met vaktaal en leren die uit te spreken en weer te geven in notaties en symbolen. De representaties zijn in eerste instantie nog informeel, maar worden steeds formeler. Denk bijvoorbeeld aan de woordrepresentaties voor optellen zoals 'erbij', 'plus' en 'som'. Leerlingen leren hun wiskundig denken en handelen uit te leggen aan anderen en daarbij steeds meer gebruik te maken van de universele vaktaal van de wiskunde. Aandacht voor verschillende representaties van objecten en bewerkingen (zoals bij vermenigvuldigingen  $\times$  en  $\cdot$  en  $2 \times a$ ,  $2 \cdot a$  en  $2a$ ) en woordenschat, inclusief synoniemen (zoals diameter en doorsnede van een cirkel) is van belang.

## Brede vaardigheden

Communiceren (hoe schrijf ik een uitwerking op zodat anderen het begrijpen?).

# Grote opdracht 12: Modelleren

## Relevantie

Modelleren is een manier om verschijnselen in de wereld te beschrijven vanuit een wiskundig perspectief. Modelleren is een belangrijke denk- en werkwijze ten behoeve van functionele wiskunde. Leerlingen kunnen zo wiskunde als betekenisvol en voorstelbaar ervaren, wat bijdraagt aan verbetering van hun motivatie voor het leergebied.

## Inhoud

Modelleren gaat over het beschrijven van een situatie met behulp van schematische voorstellingen en/of wiskundige verschijningsvormen zoals formules, vergelijkingen, grafieken, meetkundige figuren en kansverdelingen. Een spreadsheet met formules is een voorbeeld van een wiskundig model. Leerlingen leren een situatie weer te geven in een passend wiskundig model. Zo'n model kan vervolgens gebruikt worden om een probleem op te lossen, een voorspelling te doen of een beslissing te nemen.

## Brede vaardigheden

Creatief denken en handelen (welk patroon zie ik in dit verschijnsel?); kritisch denken en handelen (voldoet mijn model?); zelfregulering (ben ik nog op de goede weg?); probleemoplossend denken en handelen (hoe kan ik een wiskundig model gebruiken bij de oplossing van een probleem?).

# Grote opdracht 13: Algoritmisch denken

## Relevantie

Instellingen en bedrijven streven steeds meer naar het leren kennen en beschrijven van individuele voorkeuren van hun gebruikers. Dit met als doel een persoonlijk aanbod te bieden op basis van hun interesse. Dit gepersonaliseerde aanbod komt mede tot stand door algoritmen. Niet alleen in het dagelijks leven, maar ook in het leergebied Rekenen & Wiskunde en andere leergebieden komen algoritmen voor, die vaak door apparaten uitgevoerd worden. Door te leren algoritmen te beschrijven ontstaat inzicht in de wijze waarop wijzelf en apparaten (reken- en wiskundige) procedures kunnen uitvoeren en geeft het handvatten om typen problemen te herkennen en te kunnen oplossen.

## Inhoud

Een algoritme is het stap voor stap, in een vaste volgorde, vanuit een beginsituatie toewerken naar een bepaalde uitkomst. Denk bijvoorbeeld aan het stap voor stap beschrijven van dagelijkse handelingen, of het volgen van een montagehandleiding. Binnen Rekenen & Wiskunde valt te denken aan cijferend rekenen. Ontwerpen en beschrijven van algoritmen valt onder algoritmisch denken. Het kunnen uitvoeren van algoritmen is een voorwaarde om algoritmisch te kunnen denken en wordt ook tot deze grote opdracht gerekend.

## Brede vaardigheden

Probleemoplossend denken en handelen (op welke wijze kan ik de oplossingsstrategie (informeel of formeel) stap voor stap beschrijven?); creatief denken en handelen (welk algoritme kan ik bij dit probleem bedenken?).



4.

## BOUWSTENEN

# Getallen en bewerkingen

## GETALLEN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

Jonge kinderen komen al vroeg in aanraking met tellen, hoeveelheden, cijfers en getallen. Ze zeggen de telrij op als een liedje (akoestisch tellen), eerst zonder betekenis, later gaan ze hoeveelheden en getallen herkennen en begrijpen. Aanvankelijk nog gekoppeld aan hoeveelheden (bv. aantal appels). Later leren ze getallen zien als objecten, die je los kunt zien van een context (3, in plaats van 3 appels). Getallen krijgen betekenis en het getalgebied breidt zich uit. Leerlingen gaan getsymbolen gebruiken, kunnen het getalstelsel doorzien en zien relaties tussen getallen. Het is essentieel dat leerlingen een goede verbinding leggen tussen de informele getallenwereld en de formele vaktaal.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren in het getalgebied tot ongeveer 1000:

- getsymbolen te herkennen, benoemen en noteren;
- door en terug te tellen vanaf elk willekeurig getal (ook met sprongen), de structuur van de telrij te doorzien en weten de plaats van getallen ten opzichte van elkaar;
- hoeveelheden te schatten en precies te tellen, splitsen, vergelijken, ordenen en structureren (vijf- en tienstructuur), en te representeren met behulp van bijvoorbeeld turven en met getsymbolen;
- de tientallige structuur van ons talstelsel te doorzien en te gebruiken, bijvoorbeeld bij het herkennen van de plaatswaarde van cijfers in getallen;
- getallen te vergelijken en ordenen, splitsen en samenvoegen en hierover te redeneren;
- vaktaal te gebruiken zoals bij begrippen als: meer, minste, meeste, evenveel, half, helft, cijfer, getal.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere leerjaren van het primair onderwijs breiden het getalgebied en het getalbegrip van de leerlingen zich uit naar grote getallen, decimale getallen en breuken. Leerlingen leren de structuur van het getsysteem te gebruiken in dagelijkse contexten, maar kennen die ook op abstract niveau. Hierbij neemt schatten (zie bouwsteenset 6.2) een belangrijke plaats in. Leerlingen leren af te ronden op basis van regels of passend bij de context (zie bouwsteenset 8.1). Begrip van de relatie tussen gehele getallen, decimale getallen en breuken is essentieel. Leerlingen maken in deze fase ook kennis met eigenschappen van getallen, bijvoorbeeld van priemgetallen.



## Kennis en/of vaardigheden

### Leerlingen leren:

- omgaan met de telrij; grote hoeveelheden en gehele getallen tellen, vergelijken en ordenen; de plaatswaarde van cijfers in getallen te gebruiken; getallen te splitsen en samen te stellen. Leerlingen leren dit in samenhang met andere wiskundige inhouden, te denken valt aan meten (metriek stelsel, geld);
- af te ronden op eenheden, tientallen, honderdtallen of duizendtallen op basis van regels of passend bij de context;
- decimale getallen met een verschillend aantal cijfers achter de komma in het dagelijks leven te herkennen en te interpreteren, te vergelijken en ordenen, de decimale structuur en de plaatswaarde van cijfers in getallen te gebruiken en de relatie te leggen met breuken als deel van een geheel. Leerlingen leren dit in samenhang met andere wiskundige inhouden, te denken valt aan meten (2,8 km betekent 2 kilometer en 800 meter);
- breuken in het dagelijks leven te herkennen en te interpreteren en omgaan met de breuk als getal, als deel van een geheel (en als representatie van een verhouding);
- breuken te vergelijken en ordenen en de relatie te leggen met andere breuken (te denken valt aan onder andere gelijknamig maken), gehele getallen, decimale getallen. Leerlingen leren dit in samenhang met andere kennisdomeinen, te denken valt aan meten ( $\frac{1}{4}$  liter is hetzelfde als 0,25 liter);
- vaktaal te begrijpen, herkennen en gebruiken, zoals: uitspreken, noteren en lezen van grote getallen, decimale getallen, breuken ( $a/b$ ,  $a : b$ ,  $\frac{a}{b}$ ), begrippen zoals even, oneven, tientallig, maar ook miljoen en miljard (bijvoorbeeld in de context van geld).

## Voortgezet onderwijs onderbouw

### Inleiding

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs verdiepen de leerlingen hun inzicht, kennis en vaardigheden op het gebied van gehele getallen, decimale getallen en breuken en breidt de wereld van getallen zich verder uit. Ze maken kennis met en leren omgaan met negatieve getallen en irrationale getallen zoals  $\pi$  en wortels, bijvoorbeeld  $\sqrt{2}$ , en leren ze omgaan met wetenschappelijke notaties.

## Kennis en/of vaardigheden

### Leerlingen leren:

- zich verder te verdiepen in gehele getallen, decimale getallen en breuken, zowel binnen complexere contexten als met complexere getallen;
- om te gaan met negatieve getallen en irrationale getallen, wortels en machten;
- dat getallen op verschillende manieren weergegeven kunnen worden, zoals  $\sqrt{3}$  en 1,7320... . [havo, vwo] In de weergave van een getal kunnen bewerkingen voorkomen die je niet uitrekt, zo is  $2 + \sqrt{3}$  een getal;
- [havo, vwo] wetenschappelijke notaties (bijvoorbeeld van heel grote getallen ( $6,2 \times 10^{12}$ ) en heel kleine getallen ( $4,1 \times 10^{-6}$ ), [vwo] eindig en oneindig, negatieve, rationale, irrationale en natuurlijke getallen.

## Aanbevelingen VO bovenbouw

Getallen en getalbegrip vormen een belangrijk fundament voor Rekenen & Wiskunde in het gehele voortgezet onderwijs en verder. In de bovenbouw van het voortgezet onderwijs worden echter geen nieuwe soorten getallen aangeleerd.

# Getallen en bewerkingen

## BEWERKINGEN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

Jonge kinderen, ook peuters, leren al vroeg handelend te rekenen: ze verdelen snoepjes, ze tellen de ogen van twee dobbelstenen bij elkaar. In de eerste jaren van het primair onderwijs leren leerlingen optellen en aftrekken en leren ze de bijbehorende formele rekentaal. Later komt daar vermenigvuldigen en delen bij. Memoriseren van de bewerkingen onder 20 en automatiseren van de vermenigvuldigingen uit de tafels tot en met 10 is noodzakelijk.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren met name binnen het getalgebied met gehele getallen tot 100:

- begrippen en de relaties tussen begrippen te gebruiken, zoals erbij, eraf, samen, verschil, is evenveel als, splitsen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en som;
- schattend en precies op te tellen, af te trekken, te vermenigvuldigen en te delen in zowel contexten als zonder context. Ze gebruiken daarbij vaktaal (notaties) en leren hun oplossingsmanieren uit te leggen;
- verschillende strategieën te gebruiken waarbij ze gebruik maken van de eigenschappen van getallen en relaties tussen getallen, zoals compenseren, verwisselen, verdubbelen, halveren. Te denken valt aan  $8 + 4 = 12$ , dan is ook  $4 + 8 = 12$  en te denken valt aan  $5 \times 8 = 10 \times 4$ ;
- relaties tussen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen (bijvoorbeeld elkaars inverse) te gebruiken en uit te leggen. Te denken valt aan:  $3 + 4 = 7$  en  $7 - 3 = 4$ ;  $5 \times 2 = 10$  en  $10 : 5 = 2$ ;
- splitsingen, optellingen en aftrekkingen onder 20 uit het hoofd (memoriseren) en de tafels en deeltafels tot en met 10 te automatiseren.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere leerjaren van het primair onderwijs leren de leerlingen de vier basisbewerkingen hanteren met grotere getallen en decimale getallen en benoemde breuken. Hierbij gaat het zowel om het uitvoeren van de bewerking als het kunnen uitleggen van het gebruik van verschillende mogelijke strategieën. Ze leren hun kennis en vaardigheden toepassen in nieuwe situaties, zowel in contexten als op formeel niveau. Hierbij neemt schattend rekenen (zie bouwsteenset 6.2) een belangrijke plaats in. Daarnaast leren leerlingen gebruik maken van digitale gereedschappen, zoals de rekenmachine of een rekenapp.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- de tafels en deeltafels tot en met 10 uit het hoofd (memoriseren);
- de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met grotere en decimale getallen uit te voeren door gebruik te maken van standaardstrategieën, zoals rijgen en cijferen en door gebruik te

- maken van eigenschappen en relaties van getallen en bewerkingen, zoals compenseren, verwisselen en omvormen;
- verschillende bewerkingen met eenvoudige breuken uit te voeren - voor zover dat mogelijk is met een denkmodel of een visualisatie - en daarover te redeneren;
  - gangbare nationale en internationale symbolen te herkennen en te gebruiken, ook op (digitale) gereedschappen. Te denken valt aan:
    - deelteken is : of / of ÷
    - een decimaal getal kan met een punt of komma genoteerd worden
    - vermenigvuldigingsteken is × of \* of •
  - bewerkingen met grote getallen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen uit te voeren met behulp van een rekenmachine en deze op een kritische manier in te zetten.

## Voortgezet onderwijs onderbouw

### Inleiding

Leerlingen bouwen hier verder op het fundament dat in het primair onderwijs is gelegd. Ze voeren nu ook bewerkingen uit met negatieve getallen, heel grote en heel kleine getallen en met onbenoemde breuken. Leerlingen maken kennis met machten, wortels en irrationale getallen en leren hiermee te rekenen. Ze leren de verschillende rekenstrategieën en relaties tussen getallen en bewerkingen te gebruiken en uit te leggen. Digitale hulpmiddelen als de rekenmachine krijgen een grotere rol, waarbij het essentieel is dat de leerlingen deze kritisch blijven hanteren en de uitkomsten (schattend) controleren.

### Kennis en/of vaardigheden

#### Leerlingen leren:

- de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met positieve en negatieve gehele, decimale, en [vwo] irrationale getallen uit te voeren met behulp van verschillende strategieën;
- te machtsverheffen en worteltrekken, [havo, vwo] en logaritmen te berekenen;
- te rekenen met machten en wortels, met heel grote en heel kleine getallen;
- (standaard)procedures uit te voeren voor de vier bewerkingen met breuken. Hierbij is differentiatie binnen de onderwijsvormen noodzakelijk. Te denken valt aan het enkel aanbieden van optellen, aftrekken en vermenigvuldigen in het vmbo.

## Aanbevelingen VO bovenbouw

- schenk in de bovenbouw aandacht aan onderhoud van getalsbewerkingen;
- [bb, kb, gl] zoek met name in deze bouwsteenset afstemming tussen Rekenen & Wiskunde en de beroepsgerichte (profiel)vakken;
- [havo, vwo] schenk in de bovenbouw aandacht aan eigenschappen van bewerkingen en wat voor gevolgen die hebben voor herleidingen in formules en expressies. Te denken valt aan:  $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ , maar  $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  en  $\frac{2a}{2} = a$ , maar  $\frac{2+a}{2} \neq a$ .

# Verhoudingen

## VERHOUDINGEN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

In de eerste jaren van hun leven doen kinderen ervaringen op met (kwalitatieve) verhoudingen en leren deze te herkennen en te verwoorden: 'dit bed is veel te klein voor deze beer'. Later leren ze te redeneren over kwalitatieve verhoudingen: 'Past dit speelgoedpoppetje in dit speelgoedautootje?' Leerlingen maken daarna de stap naar kwantitatieve verhoudingen zoals 'er zitten twee keer zoveel meisjes in het groepje als jongens'.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- verhoudingen te herkennen in verschillende dagelijkse situaties en afbeeldingen en deze te verwoorden. Te denken valt aan recepten, siroop klaarmaken, het vergroten en verkleinen van plaatjes op een tablet;
- concrete verhoudingen te gebruiken en toe te passen en hierbij vaktaal te gebruiken. Te denken valt aan 'in die tekening zijn de voeten te groot getekend ten opzichte van het hoofd', 'ik heb twee keer zoveel snoepjes als jij';
- het begrip 'de helft' te gebruiken en toe te passen in situaties als 'de helft van een geheel' (een brood) en 'de helft van een hoeveelheid' (12 broodjes);
- in verhoudingssituaties berekeningen uit te voeren via verdubbelen, halveren, vermenigvuldigen;
- eenvoudige verhoudingen met elkaar te vergelijken;
- een eenvoudige verhouding of verhoudingssituatie te representeren. Te denken valt aan een verhoudingstabel of strook.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere leerjaren krijgt het domein verhoudingen veel aandacht. Het bouwt voort op het fundament dat in de lagere leerjaren is gelegd en leerlingen maken een overstap naar meer formele verhoudingstaal zoals '2 staat tot 3'. Leerlingen leren in deze fase ook rekenen en redeneren met procenten. Daarnaast worden verhoudingssituaties complexer en leren leerlingen verhoudingen niet alleen met procenten, maar ook met schaal, breuken en verhoudingstabellen te representeren. Verder leren ze te redeneren met behulp van vergrotings- en verkleiningsfactoren.

## Kennis en/of vaardigheden

### Leerlingen leren:

- formele verhoudingentaal in relatie met spreektaal te gebruiken (bv. 5 per 100, 1 op 5, 3 staat tot 8);
- breuken als representatie van een verhouding te herkennen;
- in dagelijkse situaties procentnotaties uit te spreken, te herkennen als deel van een totaal en er betekenis aan te geven en berekeningen uit te voeren met procenten;
- in dagelijkse situaties schaalnotaties uit te spreken, te herkennen als een representatie van een verhouding en er betekenis aan te geven en berekeningen uit te voeren met schaallijnen en schaalnotaties;
- een verhouding of verhoudingssituatie te representeren met behulp van een verhoudingstabel;
- begrijpen dat bij het vergroten of verkleinen van een afbeelding of plattegrond, zowel de lengte als de breedte in dezelfde verhouding moet worden vergroot of verkleind;
- de samenhang te doorzien tussen decimale getallen, breuken, procenten, schaal en verhoudingen en hiermee te werken in betekenisvolle situaties. Ze leren veel voorkomende relaties tussen verhoudingen, decimale getallen, breuken en procenten uit het hoofd (memoriseren), te denken valt aan: een kwart,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{25}{100}$ , 0,25, 25%;
- eenvoudige verhoudingsproblemen op te lossen;
- dat er percentages groter dan 100% zijn.

## Voortgezet onderwijs onderbouw

### Inleiding

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs onderhouden leerlingen de opgedane kennis en vaardigheden. Bovendien worden verhoudingssituaties complexer van aard en worden ze uitgebreid met exponentiële groei en redeneren over vergrotingsfactoren.

## Kennis en/of vaardigheden

### Leerlingen leren:

- kritisch te denken en te redeneren over verhoudingsproblemen waarin de verhoudingsrelatie niet direct zichtbaar is;
- verhoudingen met elkaar te vergelijken;
- het onderscheid tussen absolute en relatieve getallen en hierover te redeneren in betekenisvolle situaties;
- te rekenen met en redeneren over percentages groter dan 100%;
- te begrijpen dat bij het in verhouding vergroten of verkleinen van ruimtefiguren, de afmetingen in dezelfde verhouding moeten worden vergroot of verkleind;
- [havo, vwo] exponentiële groei te herkennen, te beschrijven, toename/afname in procenten uit te drukken en de groeifactor te bepalen.

## Aanbevelingen VO bovenbouw

In de bovenbouw van het voortgezet onderwijs leren leerlingen weinig nieuws over verhoudingen en verhoudingsproblemen.

- Schenk aandacht aan onderhoud aan het werken met verhoudingen.
- [bb, kb, gl] Zoek ook in deze bouwsteenset afstemming tussen Rekenen & Wiskunde en de beroepsgerichte (profiel)vakken.

# Meten en meetkunde

## METEN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

Jonge kinderen maken kennis met meten door allereerst ervaring op te doen met vergelijken, ordenen en classificeren op basis van grootheden zoals lengte, oppervlakte, gewicht, inhoud, tijd. Tegelijkertijd ontwikkelen ze hierbij ook (wiskunde)taal: 'Wie heeft de grootste schoenen?' De jonge kinderen leren meten met natuurlijke maateenheden (met informele meetinstrumenten zoals 'stappen') en de noodzaak van het meten met standaardmaten (met formele meetinstrumenten, zoals een meetlint). Ze leren hierover redeneren in probleemsituaties.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- meten door te vergelijken, ordenen van grootheden en meten met natuurlijke maateenheden: op lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht, tijd en temperatuur, door te meten met standaardmaateenheden en door verschillende (digitale) meetinstrumenten af te lezen;
- schattend te meten maar ook maten te verfijnen, wanneer nauwkeurig meten noodzakelijk is;
- vaktaal te gebruiken in de context van meten. Te denken valt aan de begrippen bij het vergelijken en ordenen (bijvoorbeeld groot, groter, grootste) en de namen van verschillende grootheden en bijbehorende eenheden;
- tijdbesef te ontwikkelen, tijden af te lezen (digitaal en analoog) en leren verschillende eenheden voor tijd. Ze leren hiermee berekeningen uit te voeren, zoals tijdsduur uitrekenen. Ook leren ze specifieke begrippen als de dagen van de week of de delen van de dag;
- 'prijs' als grootheid voor de waarde van dingen en het systeem van kopen en betalen.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere leerjaren van het primair onderwijs leren de leerlingen te rekenen met maten in betekenisvolle situaties en hierover te redeneren. Hierbij leren ze ook met inzicht omgaan met het metriek stelsel. Ze doen verder vaardigheden op in het gebruiken van moderne (digitale) meetinstrumenten. Daarnaast verwerven ze inzicht in belangrijke aspecten van het praktisch meten, zoals het kiezen van een passend meetinstrument, een passende eenheid, het schatten van maten en het representeren en communiceren van het resultaat in vaktaal.

## Kennis en/of vaardigheden

### Leerlingen leren:

- binnen meetsituaties de juiste grootte te bepalen, het daarbij geschikte (digitale) meetinstrument te gebruiken en het meetresultaat uit te drukken in de juiste eenheid. Te denken valt hier ook aan het gebruik van moderne meetinstrumenten zoals een app om te meten;
- zich een voorstelling te maken van verschillende referentiematen. Te denken valt aan 'een grote stap van een volwassene is ongeveer 1 meter', 'je loopt ongeveer 4 km in een uur';
- eenheden om te rekenen in andere eenheden door gebruik te maken van het metrieke stelsel;
- rekenen met samengestelde grootheden die in het dagelijks leven voorkomen. Te denken valt aan snelheid in km/uur, €/kg. Ze leren hierover te redeneren in probleemsituaties;
- met kloktijden en met tijden vanuit de kalender (eeuwen, jaren, maanden, enzovoort) te rekenen en te redeneren over tijden;
- te rekenen met geld in euro's en hoe betalingsverkeer zonder contant geld verloopt.

## Voortgezet onderwijs onderbouw

### Inleiding

In de onderbouw van het VO breidt de leerling zijn begrip, kennis en vaardigheden verder uit op het gebied van meten, rekenen in het metrieke stelsel en het gebruik van meetinstrumenten. De leerling leert hoeken te meten en nieuwe meetinstrumenten te gebruiken. De leerling leert rekenen met complexere samengestelde grootheden (bijvoorbeeld downloadsnelheid of koppel) in relevante toepassingen.

## Kennis en/of vaardigheden

### Leerlingen leren:

- hun vaardigheid in meten, met rekenen in het metrieke stelsel en gebruik van (nieuwe) meetinstrumenten uit te breiden en te verdiepen. Zo leren ze hoeken te meten, te benoemen en te ordenen en de juiste (digitale) meetinstrumenten daarvoor te gebruiken;
- te redeneren over nauwkeurig meten en na te denken over de mate van nauwkeurigheid die vereist wordt, resultaten af te lezen en die correct weer te geven. Te denken valt aan: Wat is het verschil tussen 2,0 m en 2,00 m? Wat betekent een meetresultaat  $2,0 \pm 0,05$  m?;
- met nieuwe grootheden (downloadsnelheid, CO<sub>2</sub>-gehalte) en eenheden (kilobyte, gigabyte, terabyte, ppm CO<sub>2</sub>) te werken die voortkomen uit mondiale thema's als duurzaamheid, technologie.

## Aanbevelingen VO bovenbouw

Leerlingen leren in andere leergebieden te rekenen met specifieke grootheden zoals versnelling van een bewegend voorwerp, concentratie van een scheikundige stof in een oplossing of het verhang van een rivier.

- Schenk aandacht aan onderhoud van meetvaardigheid en aan het gebruik en omrekenen van maten in andere leergebieden.



# Meten en meetkunde

## VORM EN RUIMTE

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

Jonge kinderen verkennen hun directe omgeving in eerste instantie vanuit het eigen lichaam. Vervolgens ontdekken ze de ruimte om hen heen en oriënteren ze zich ook op objecten en vormen in hun omgeving, in het platte vlak (bv. voetafdruk, vierkant, cirkel) en driedimensionaal (bv. gebouwen, kubus). Ze ontwikkelen hun voorstellingsvermogen over hoe vormen en objecten er in de ruimte uit kunnen zien en ze leren erover praten en redeneren zonder dat ze deze vormen hoeven te zien. Door het volgen en beschrijven van routes en het herkennen en tekenen van patronen in spiegelbeeld krijgen ze grip op de ruimte om zich heen.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- een route op een eenvoudige plattegrond te beschrijven met begrippen, zoals rechts, links, rechtdoor;
- meetkundige begrippen te gebruiken, zoals recht, schuin, lijn, midden;
- meetkundige figuren te benoemen en te herkennen, zoals vierkant, cirkel, kubus en bol;
- het voor-, zij- of bovenaanzicht van ruimtelijke objecten of bouwsels te herkennen;
- bouwplaten van driedimensionale figuren (zoals kubus, balk, piramide) te herkennen en omgekeerd;
- eenvoudige ruimtelijke objecten te maken van een bouwplaat, te denken valt aan een doosje / balk;
- eenvoudige patronen te spiegelen.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere leerjaren verdiepen de leerlingen de eerder aangeboden kennis en vaardigheden. Ze leren deze toe te passen in dagelijkse situaties, zoals bij het lokaliseren van voorwerpen (de schaar ligt in de middelste la aan de linkerkant) en routes op plattegronden en kaarten. Leerlingen leren dat meetkundige figuren als denkobjecten beschouwd kunnen worden die kenmerken en eigenschappen hebben.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- begrippen voor richtingsaanduidingen te gebruiken bij het beschrijven en volgen van een route, zoals linksaf, naar het noorden;
- gegevens van plattegronden met een legenda, schaallijn en een rooster met coördinaten af te lezen en te interpreteren;
- meetkundige figuren te herkennen en te benoemen en hiervan de kenmerken aan te geven. Te denken valt aan een ruit, vijfhoek, balk en piramide;

- driedimensionale objecten te herkennen in tweedimensionale representaties, zoals in een bouwplaat, schaduw, vooraanzicht of patroontekening en hierover redeneren. Te denken valt aan: 'Waarom kan deze bouwplaat niet van dit object zijn? Wat klopt er niet?';
- symmetrie, waaronder draaisymmetrie, en gelijkvormigheid van objecten te herkennen. Te denken valt aan spiegelen en het zoeken van symmetrieassen.

## Voortgezet onderwijs onderbouw

### Inleiding

De leerling heeft in het primair onderwijs de nodige ervaringen opgedaan met vorm en ruimte in de reële wereld. Daardoor zijn besef en begrip ontwikkeld. In deze fase verdiepen de leerlingen de eerder aangeboden kennis en vaardigheden. Ruimtelijke objecten in de wereld van leerlingen zijn in deze fase meestal samengesteld en complexer van aard. Leerlingen leren werken met coördinaten, ook raken ze vertrouwd met de digitale 2D-beelden van de ruimtelijke vormen.

### Kennis en/of vaardigheden

#### Leerlingen leren:

- coördinaten te bepalen, routes te beschrijven en routes uit te zetten met behulp van coördinaten;
- te redeneren op basis van symmetrie, gelijkvormigheid en congruentie. Te denken valt aan het herkennen en voortzetten van regelmatige patronen in randen en versieringen, gelijkvormigheid herkennen en gebruiken bij zon en schaduw;
- te redeneren met behulp van kijklijnen en projecties. Te denken valt aan: Wat kan iemand vanuit zijn raam zien? Vanuit welk punt is een foto gemaakt?
- te redeneren met behulp van de kenmerken en eigenschappen van meetkundige figuren. Te denken valt aan: Laat zien dat een ruit een parallellogram is. Geldt het omgekeerde ook?
- figuren te tekenen en (werk)tekeningen te maken en daarbij passend (digitaal) gereedschap te gebruiken;
- in authentieke situaties veelgebruikte meetkundige begrippen en symbolen te herkennen, benoemen en te gebruiken. Te denken valt aan begrippen en symbolen voor rechte hoek, evenwijdig, loodrecht, haaks;
- meetkundige gereedschappen toe te passen om het meetkundig inzicht te vergroten.

# Meten en meetkunde

## REKENEN IN DE MEETKUNDE

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

De basis voor het leren rekenen in de meetkunde is dat leerlingen leren omgaan met begrippen rondom meten en meetkunde en kennis over en inzicht krijgen in grootheden als omtrek, oppervlakte en inhoud. Deze basis wordt beschreven in de bouwstenen 3.1 'Meten' en 3.2 'Vorm en ruimte'. Daarom staan er geen kennis en vaardigheden beschreven in deze fase.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere jaren van het primair onderwijs leren leerlingen rekenen met en redeneren over de grootheden omtrek, oppervlakte en inhoud en leren hierbij ook formules gebruiken. Daarnaast leren ze rekenen met een 'vergrotingsfactor'.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- de omtrek te berekenen van figuren. Bij een rechthoek en een vierkant leren ze de omtrek te berekenen met behulp van formule(s) voor de omtrek;
- met behulp van een formule de oppervlakte te berekenen van:
  - een rechthoek en vierkant;
  - rechthoekige samengestelde figuren;
  - de totale oppervlakte van de zijvlakken van een balk of kubus;
- de oppervlakte te berekenen van rechthoekige en gelijkbenige driehoeken door middel van omkaderen;
- de inhoud te berekenen van balkvormige figuren met behulp van een formule;
- rekenen met een eenvoudige vergrotingsfactor. Te denken valt aan het uitrekenen van de oppervlakte of inhoud wanneer de zijden van een figuur twee keer zo lang worden.

### Voortgezet onderwijs onderbouw

#### Inleiding

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs leren leerlingen de opgedane kennis en vaardigheden toe te passen op meer verschillende en complexere figuren in diverse probleemsituaties. Leerlingen leren rekenen aan lengtes, hoeken, oppervlakte en inhoud. Hierbij wordt het aantal formules voor oppervlakte en inhoud verder uitgebreid.

## Kennis en/of vaardigheden

### Leerlingen leren:

- lengten, omtrek en oppervlakte te berekenen van en in complexere vlakke en ruimtelijke figuren met behulp van formules;
- dat  $\pi$  de verhouding is tussen de omtrek en de straal van een cirkel. Leerlingen leren vervolgens met een formule de omtrek en oppervlakte van een cirkel te berekenen;
- de eigenschappen van veelhoeken en van snijdende en evenwijdige lijnen te gebruiken om hoeken te berekenen;
- [kgt, havo, vwo] de stelling van Pythagoras te begrijpen en toe te passen in vlakke figuren en [havo, vwo] deze stelling ook toe te passen in ruimtelijke figuren;
- [kgt, havo, vwo] de inhoud te berekenen van ruimtelijke figuren waarvan grondvlak en bovenvlak gelijk zijn ( $inhoud = oppervlakte\ grondvlak \times hoogte$ ) en van figuren met een grondvlak en een punt ( $inhoud = \frac{1}{3} \times oppervlakte\ grondvlak \times hoogte$ );
- [havo, vwo] de inhoud en oppervlakte te berekenen van een vergrote of verkleinde figuur zonder gebruik te maken van de afmetingen van de figuur;
- [havo, vwo] goniometrische verhoudingen te gebruiken bij berekening van hoeken en afmetingen in twee- en driedimensionale figuren.

# Variabelen, verbanden en formules

## VERBANDEN, VERSCHIJNINGSVORMEN, VERGELIJKINGEN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

De kern van deze bouwsteen ligt in het voortgezet onderwijs. In het primair onderwijs wordt hiervoor een basis gelegd. We zien echter dat heel jonge kinderen al uit zichzelf verbanden leggen, denk bijvoorbeeld aan: 'als je groter bent, ben je ook ouder', ook al kloppen die conclusies vaak nog niet en zijn ze gebaseerd op ervaringen. In de eerste leerjaren leren leerlingen denken en redeneren over verbanden. Ze leren verbanden te zoeken in hun naaste omgeving en deze in eigen woorden te beschrijven, bijvoorbeeld hoe verder je van school woont, hoe langer je moet wandelen. Zo maken ze ook al kennis met het concept 'variabele'.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- eenvoudige verbanden in eigen woorden te beschrijven, te denken valt aan: 'hoe meer kinderen in de groep, hoe meer haakjes je nodig hebt om de jassen op te hangen';
- gevolgen van een verandering in een variabele te beschrijven. Te denken valt aan: Als je voor een recept voor 4 personen 6 eieren nodig hebt, wat betekent het voor het aantal eieren als je het recept voor 8 personen moet maken? En voor 12 personen?;
- vleksommen met één onbekende op te lossen.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere leerjaren leren leerlingen complexere verbanden te beschrijven, bijvoorbeeld hoe sneller de donder na de bliksem komt, hoe dichterbij de onweersbui. Leerlingen leren woordformules op te stellen bij verbanden en deze via tabellen weer te geven in grafieken. Te denken valt aan de woordformule 'totale spaarbedrag =  $50 + 10 \times$  aantal maanden' waarbij voor een verschillend aantal maanden het totale spaarbedrag wordt berekend en in een grafiek wordt weergegeven.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- complexere verbanden te herkennen en beschrijven;
- eenvoudige woordformules op te stellen;
- combinaties van mogelijke oplossingen van vlekopgaven met twee onbekenden te vinden;
- bij een woordformule een tabel te maken, bij de tabel een grafiek te maken.

# Voortgezet onderwijs onderbouw

## Inleiding

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs leren leerlingen representaties van verbanden in elkaar om te zetten. ICT wordt hierbij als hulpmiddel ingezet. Leerlingen maken de stap van woordformules naar de formelere notatie met letters en symbolen. Leerlingen leren vergelijkingen en ongelijkheden op te lossen: algebraïsch, numeriek, grafisch en met ICT.

## Kennis en/of vaardigheden

### Leerlingen leren:

- met formules te werken waarbij [bb] variabelen door middel van woorden worden weergegeven, waarbij [kb] variabelen door middel van betekenisvolle letters worden weergegeven en waarbij [gt, havo, vwo] variabelen door middel van willekeurige letters worden weergegeven;
- de verschillende betekenissen van het is-gelijk-teken te onderscheiden. Te denken valt aan  $2 + 3 = \dots$  (bereken de uitkomst), en  $y = 2x + 3$  en  $2(x + 3) = 2x + 6$  (hier betekent het is-gelijk-teken dat beide zijden gelijkwaardig aan elkaar zijn);
- onderscheid te maken tussen een onbekende ( $x + 2 = 5$ ), een variabele ( $y = 2x + 3$ ) en een parameter ( $y = 2x + b$ );
- een lineaire of [kgt, havo, vwo] andersoortige vergelijking waarin de onbekende op slechts één plek voorkomt, algebraïsch op te lossen; Te denken valt aan  $2x + 5 = 9$ ,  $x^2 - 5 = 4$  en  $\sqrt{x - 2} = 6$ ;
- in een lineaire of [gt, havo, vwo] andersoortige vergelijking waar de onbekende op verschillende plekken voorkomt, de onbekende met eenvoudige technieken te isoleren en de vergelijking vervolgens op te lossen. Te denken valt aan toepassing van de balansmethode;
- [gt, havo, vwo] expressies te herleiden door gelijksoortige termen samen te nemen, haakjes weg te werken en ontbinden in factoren;
- [gt, havo, vwo] expressies met machten, wortels en gebroken vormen te herleiden;
- [gt, havo, vwo] een variabele vrij te maken uit een formule. Te denken valt aan: uit  $y = 2x + 5$  de formule  $x = 0,5y - 2,5$  af te leiden;
- [gt, havo, vwo] vergelijkingen van de vorm  $A \times B = 0$ ,  $\frac{A}{B} = 0$  en  $f(A) = f(B)$  algebraïsch op te lossen; Te denken valt aan  $(x - 2)(2x + 6) = 0$ ,  $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$  en  $\sqrt{x + 2} = \sqrt{4 - x}$ ;
- ongelijkheden met bovenstaande kenmerken algebraïsch op te lossen;
- overige vergelijkingen en ongelijkheden numeriek, grafisch en/of met behulp van ICT op te lossen.

## Aanbevelingen

### Voortgezet onderwijs bovenbouw

Het oplossen van vergelijkingen en verwerving van kennis over verbanden en verschijningsvormen in het algemeen kent een vervolg in de bovenbouw.

- [bb] Leer leerlingen eenvoudige lineaire vergelijkingen op te lossen met een onbekende die met behulp van een letter genoteerd wordt;
- [havo, vwo] Leer leerlingen bij wiskunde B ook andere technieken voor het algebraïsch oplossen van vergelijkingen. Te denken valt aan het ontbinden in factoren bij kwadratische en hogeregraads vergelijkingen, kwadraat afsplitsen en aan de wortel- of abc-formule.

# Variabelen, verbanden en formules

## SPECIALE VERBANDEN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

Kinderen hebben op jonge leeftijd al gevoel voor patronen en regelmaat. Te denken valt aan regelmaat kiezen bij het rijgen van kralen. In de eerste leerjaren leren leerlingen denken en redeneren over eenvoudige regelmaat. Ze leren de regelmaat in een reeks vormen en in een getallenrij in eigen woorden te beschrijven en deze regelmaat vervolgens zelf voort te zetten.

#### Kennis en/of vaardigheden

- regelmaat te herkennen in een serie getallen en deze regelmaat in woorden te beschrijven en voort te zetten. Te denken valt aan een rij als: 99, 97, 95, ... 'Wat is dan het volgende getal? Hoe weet je dat?';
- periodieke regelmaat te herkennen en te beschrijven, te denken valt aan: maak de reeks af: vierkant, driehoek, cirkel, vierkant, .... 'Wat is dan het volgende figuur? Hoe weet je dat?'

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de bovenbouw van het po leren leerlingen dat er naast de vaste toe- of afname ook andere soorten regelmaat bestaan die in verbanden weergegeven kunnen worden. Bijvoorbeeld verbanden waarbij er steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigd wordt of waarbij er door hetzelfde getal gedeeld wordt.

#### Kennis en/of vaardigheden

Leerlingen leren:

- regelmaat in een reeks getallen of in een reeks meetkundige patronen te herkennen, weer te geven in een tabel en te verwoorden. Te denken valt aan regelmaat in de reeks 1, 2, 4, 8, 16, ...

### Voortgezet onderwijs onderbouw

#### Inleiding

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs wordt het aantal speciale verbanden uitgebreid en geformaliseerd. Leerlingen maken kennis met de formules, grafieken en eigenschappen van deze verbanden.

#### Kennis en/of vaardigheden

**Leerlingen leren:**

- de soort regelmaat tussen een afhankelijke en onafhankelijke variabele te herkennen in tabellen en deze voort te zetten als er sprake is van:

- een lineair verband: (Als de onafhankelijke variabele met een vaste hoeveelheid toeneemt, neemt de afhankelijke variabele met een vaste hoeveelheid toe of af);
  - [havo, vwo] Een exponentieel verband (Als de onafhankelijke variabele met een vaste hoeveelheid toeneemt, neemt de afhankelijke variabele met een vaste factor toe of af);
  - [havo, vwo] Een logaritmisch verband (Als de onafhankelijke variabele met een vaste factor toeneemt, neemt de afhankelijke variabele met een vaste hoeveelheid toe of af);
  - [havo, vwo] Een machtsverband of wortelverband (Als de onafhankelijke variabele met een vaste factor toeneemt, neemt de afhankelijke variabele met een vaste factor toe of af (machtsverband en in het bijzonder gebroken (de exponent is negatief) of wortelverband (de exponent is een breuk));
  - [havo, vwo] Periodiek verband (De afhankelijke variabele vertoont een zich herhalend patroon).
- van de bovenstaande standaardverbanden grafieken te tekenen en karakteristieken te benoemen;
  - formules op te stellen bij lineaire en [havo, vwo] exponentiële verbanden, bijvoorbeeld  $Kosten = 50 + \text{aantal uren} \cdot 10$  en  $Geldbedrag = 1000 \cdot 1,02^{\text{aantal jaren}}$ ;
  - verband te zien tussen verhoudingen en evenredigheid;
  - [havo, vwo] omgekeerd evenredigheid te herkennen in een tabel;
  - [vwo] te redeneren over lineaire ( $y = ax + b$ , met  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ) en exponentiële verbanden ( $y = b \cdot g^x$ );
  - [havo, vwo] te herkennen dat een bepaald verband al dan niet een verschuiving en/of vervorming is van een van bovenstaande standaardverbanden. Indien dat het geval is, leren ze de grafieken handmatig te tekenen, indien dat niet het geval is zetten ze digitale gereedschappen in.

## Aanbevelingen

### Voortgezet onderwijs bovenbouw

Het leren over speciale verbanden wordt in de bovenbouw voortgezet en het repertoire aan speciale verbanden wordt uitgebreid.



# Data, statistiek en kans

## KANSEN EN KANSVERDELINGEN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

Kansrekening heeft tot doel greep te krijgen op onzekerheid en toeval. Hiermee kan de waarschijnlijkheid van uitkomsten bepaald worden. In de eerste leerjaren van het primair onderwijs wordt een basis gelegd als het gaat om kansbegrip. Het is nog een leerproces waarbij het ervaren centraal staat. Denk hierbij aan het spelen van dobbelspelletjes en nadenken over winst- en verlieskans in termen als 'eerlijk', 'niet eerlijk'. Tevens wordt er ervarenderwijs gewerkt met combinatoriek, denk hierbij bijvoorbeeld aan alle mogelijkheden hoe een vlag met drie kleuren en drie banen eruit kan zien.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- na te denken over wanneer een spelletje eerlijk is (bijvoorbeeld ergens om loten, kop of munt, steen-papier-schaar);
- waarom bepaalde situaties meer kans hebben om voor te komen dan andere. Te denken valt aan: uit een doos met 8 gele ballen en 2 rode ballen pak je met je ogen dicht een bal. 'Welke kleur denk je dat die bal heeft? Waarom denk je dat? En als we er een rode bal bijdoen en een gele bal uithalen? Leg eens uit hoe dat zit';
- dat er bij bijvoorbeeld twee mogelijke uitkomsten verschillende combinaties mogelijk zijn. Te denken valt aan kinderen in een gezin (jongen-jongen, jongen-meisje, meisje-jongen of meisje-meisje). Ze leren hierover te redeneren.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere leerjaren van het primair onderwijs worden de activiteiten uit de onderbouw voortgezet. Leerlingen werken verder met combinatoriek in concrete maar complexere situaties waarbij ze vooral tot oplossingen komen door informele strategieën te gebruiken en te modelleren. Leerlingen gaan kansexperimenten uitvoeren en gaan bezig met het toepassen van kansbegrip en erover redeneren. Begrip en kennis van breuken als verhouding en van procenten is hiervoor noodzakelijk.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- kansexperimenten uit te voeren (al dan niet digitaal);
- kennis van verhoudingen en hun representaties toe te passen bij het verwoorden van kansen. Te denken valt aan hoe groot de kans is op een jongen bij een zwangerschap;
- een schematische weergave te maken (bijvoorbeeld boomdiagram) om aan te tonen hoeveel mogelijkheden (combinatoriek) er zijn bij een situatie van meerdere items; Te denken valt aan: 'Hoeveel verschillende setjes kun je maken als je 4 broeken, 2 truien en 3 paar schoenen hebt?';

- kansen te interpreteren bij alledaagse situaties (45% van de mensen krijgt een beugel, hoe groot is de kans dat jij een beugel krijgt?);
- redeneren over kansen onder andere bij dobbelsteenwerpen.

## Voortgezet onderwijs onderbouw

### Inleiding

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs is er een voortzetting van de activiteiten uit het primair onderwijs. Hier vindt het bepalen van aantallen mogelijkheden plaats door te noteren en te ordenen en met behulp hiervan te rekenen. Leerlingen leren dat een kans de verhouding is tussen het aantal gunstige mogelijkheden en het totale aantal mogelijkheden en leren hiermee te rekenen, bijvoorbeeld met behulp van een boomdiagram. Kansexperimenten nemen toe in complexiteit. Ook leren leerlingen kansexperimenten te simuleren.

### Kennis en/of vaardigheden

#### Leerlingen leren:

- informatie systematisch te noteren bijvoorbeeld in roosters, boomdiagrammen, wegendiagrammen en aan de hand daarvan te berekenen hoeveel mogelijkheden er zijn;
- kansexperimenten op te zetten, uit te voeren en te simuleren (bijvoorbeeld met digitale hulpmiddelen);
- kansen te berekenen met behulp van de kansdefinitie van Laplace;
- [havo, vwo] kansbomen te maken en daarin de rekenregels (som- en productregel) voor kansrekening toe te passen. Zij leren daarbij bewerkingen met breuken toe te passen.

## Aanbevelingen

### Voortgezet onderwijs bovenbouw

Kansrekening is voor alle leerlingen in de bovenbouw van havo en vwo van belang. Ze maken allen kennis met de normale verdeling.

- [havo] Beperk kennis van de normale verdeling tot diens kenmerken en het gebruik van vuistregels.
- [vwo] Biedt bij wiskunde A en C verdieping aan met betrekking tot het rekenen met kansen. Leer leerlingen ook over verwachtingswaarde en standaarddeviatie van een kansverdeling.

# Data, statistiek en kans

## DATA EN STATISTIEK

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

Jonge kinderen zijn van nature geneigd om dingen te ordenen, te sorteren op bijvoorbeeld kleur of vorm en te vergelijken op grootte, bijvoorbeeld de schelpen die zij op het strand vinden of de kralen in een doos. In de eerste leerjaren van het primair onderwijs leren ze hoe je niet alleen voorwerpen, maar ook gegevens kunt ordenen. Leerlingen leren turven, gegevens verzamelen en weer te geven in bijvoorbeeld een beelddiagram. Ze leren over deze gegevens te redeneren en te communiceren (uitleggen wat je kunt zien in het beelddiagram en wat niet).

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- hoe je voorwerpen en gegevens overzichtelijk kunt ordenen en vergelijken en hierover na te denken en te bespreken;
- gegevens te verzamelen en hiervan grafische representaties te maken, bijvoorbeeld een beeld- of staafdiagram;
- grafische representaties, zoals een beelddiagram of staafdiagram of turftabel af te lezen en te interpreteren;
- vaktaal te gebruiken zoals: diagram, turven, tabel, beeld, verzamelen, informatie en gegevens.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere leerjaren van het basisonderwijs maken de leerlingen kennis met nieuwe en met complexere grafische representaties en leren ze zelf eenvoudige grafische representaties en infographics te maken al dan niet met behulp van ICT. Ze leren rekenen met de centrummaten gemiddelde, modus en mediaan en de uitkomsten te interpreteren. Daarnaast ontwikkelen de leerlingen een kritische houding ten opzichte van data en statistiek. Ze leren of gegevens op een goede manier zijn verzameld, of grafische representaties niet misleidend zijn en of conclusies goed zijn onderbouwd.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- te specificeren aan de hand van welke gegevens je een eenvoudige onderzoeksvraag kunt beantwoorden. Te denken valt aan een vraag als of de jongens uit je klas groter zijn dan de meisjes uit je klas;
- op verschillende wijzen gegevens te verzamelen, zoals het verzamelen van data in de klas, in de buurt van school of door op internet een gegevensbron te zoeken;
- onderscheid te maken tussen steekproef en populatie;
- grafische representaties (zoals infographics, diagrammen en grafieken) te maken bij verzamelde gegevens, op papier en digitaal;

- bij bestaande grafische representaties leren ze voordelen en nadelen te benoemen van de gekozen representatie, interpretaties te geven, conclusies te trekken en in sommige gevallen voorspellingen te doen;
- in eenvoudige situaties bij gegeven data de centrummaten rekenkundig gemiddelde, mediaan en modus te berekenen en te interpreteren en hierover te redeneren;
- om kritische vragen te stellen bij de wijze van onderzoek (onder andere in de media). Dit kan betrekking hebben op de wijze waarop gegevens verzameld zijn, de keuze van visualisaties en in hoeverre conclusies bij de feiten correct zijn (factchecking);
- formelere vaktaal te gebruiken zoals: grafiek, gemiddelde, modus, mediaan, x-as en y-as, stijgen, dalen en scheurlijn.

## Voortgezet onderwijs onderbouw

### Inleiding

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs worden de activiteiten uit het basisonderwijs voortgezet, waarbij de grafische representaties complexer en formeler van aard zijn. Leerlingen leren op basis van deze visualisaties trends te herkennen en voorspellingen te doen. Daarnaast wordt voorbereid op het kwantificeren van onzekerheid, zoals beschreven wordt in de aanbevelingen voor de bovenbouw.

### Kennis en/of vaardigheden

#### Leerlingen leren:

- de empirische cyclus te doorlopen. Dit betekent dat ze bij een situatie
  - de juiste vragen stellen en de benodigde gegevens specificeren,
  - gegevens verzamelen,
  - de resultaten presenteren in passende visualisaties, centrummaten en spreidingsmaten en
  - conclusies trekken op basis van de resultaten
- (creatieve) grafische representaties te interpreteren en te maken, waarbij aandacht is voor (passend bij de data) handig gekozen assenstelsels, cumulatieve frequenties, samengestelde tabellen en diagrammen. Ze leren op basis van de grafische representaties trends te herkennen en op basis van vuistregels voorspellingen te doen, te interpoleren en extrapoleren;
- centrummaten en spreidingsmaten (waaronder de standaardafwijking) in eenvoudige gevallen op papier en verder digitaal te berekenen en erover te redeneren;
- [havo, vwo] onderscheid te maken tussen correlatie en causaliteit;
- [havo, vwo] te beoordelen hoe goed onderbouwd conclusies op basis van data zijn door kritische vragen te stellen bij de wijze van onderzoek en dataverzameling (factchecking). Hierbij leren leerlingen oog te hebben voor representativiteit, het effect van bias en statistische denkfouten.

# Aanbevelingen

## Voortgezet onderwijs bovenbouw

Deze bouwsteenset is relevant voor alle leerlingen in de bovenbouw. De nadruk ligt vooral op het ontwikkelen van een kritische blik ten aanzien van statistische weergaven en uitspraken, zoals dat bij fact-checking aan bod komt.

- zoek naar gelegenheden om in andere leergebieden statistisch onderzoek te doen.
- [vmbo] Schenk aandacht aan onderscheid maken tussen correlatie en causaliteit. Leer leerlingen te beoordelen hoe goed onderbouwd conclusies op basis van data zijn door kritische vragen te stellen bij de wijze van onderzoek en dataverzameling (fact-checking). Hierbij leren leerlingen oog te hebben voor representativiteit, het effect van bias en statistische denkfouten;
- [kgt] schenk aandacht aan dataverwerking en statistiek zoals die voorkomen in ondernemersopleidingen van niveau 4 in het mbo;
- [havo, vwo] leer leerlingen statistische technieken te gebruiken, hierover te redeneren en aan de hand van hun uitkomsten conclusies te trekken over betrouwbaarheid en correlatie. Laat leerlingen bij wiskunde A zelf met gebruikmaking van ICT een statistisch onderzoek uitvoeren met (grote) datasets;
- [havo, vwo] Wetenschappelijke en statistisch denken aanbieden heeft als risico dat het platgeslagen stappenplannen met vuistregels worden (“Als Cramer’s  $\phi > 0.4$  noemen we het groot”). Het zelf uitvoeren van onderzoek en simulaties is inzichtelijker en levert meer op dan het berekenen van een betrouwbaarheidsinterval. Welke methodieken voor beslissingen en conclusies trekken aangeboden worden moet nader overwogen worden.

# Veranderingen en benaderingen

## VERANDERINGEN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

In de eerste leerjaren van het primair onderwijs wordt een basis gelegd als het gaat om veranderingen, de nadruk ligt echter in het voortgezet onderwijs. Het gaat hier vooral om het herkennen van veranderingen en hierover te communiceren en redeneren. Een kind helpt mee tafeldekken en weet dat er elke dag vier mensen aan tafel zitten, maar als er twee mensen meer komen eten dan weet het ook dat er van alles twee meer nodig zijn: twee borden, bekers, messen en vorken. Zo ook als er minder mensen aan tafel zullen zitten. Het kind ervaart al op jonge leeftijd wat het betekent als aantallen af- of toenemen.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- het herkennen van veranderingen en hierover te communiceren en redeneren, te denken aan het voorbeeld van tafeldekken;
- in eenvoudige beelddiagrammen trends herkennen en beschrijven met dagelijkse termen als groter worden, kleiner worden, gelijk blijven, enzovoorts.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere leerjaren van het primair onderwijs worden de activiteiten uit de onderbouw voortgezet. De nadruk ligt nog steeds in het voortgezet onderwijs. In eerste instantie leren de leerlingen aan de hand van een model, zoals een grafiek of een tabel bij een situatie te bepalen welke verandering zichtbaar is. De leerlingen leren kritisch te denken en te redeneren over deze verandering, bijvoorbeeld: 'Wat betekent het als de lijn op een bepaald punt in een tijd-afstand lijngrafiek heel steil loopt?'

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- verandering in een representatie van een verband (grafiek, tabel, beschrijving) te herkennen en te verwoorden, te denken valt aan: af- en toename, stijgen, dalen, constant, groei, verdubbelen, halveren;
- dat verandering in de ene representatie van een verband (grafiek, tabel, beschrijving) doorwerkt in de andere vorm(en). Te denken valt aan: als de voorrijkosten gelijk blijven en het uurtarief toeneemt, dan wordt de grafiek die het totale bedrag weergeeft, steiler;
- absolute en relatieve veranderingen van elkaar te onderscheiden en er over te redeneren. Te denken valt aan: De korting op een product is € 30,- óf 30%. Als dat product € 60,- kost, welke korting kies je dan?

# Voortgezet onderwijs onderbouw

## Inleiding

De essentie van deze bouwsteenset ligt in deze fase. Hier krijgen leerlingen zicht op de betekenis en weergave van de verandering van een verband.

## Kennis en/of vaardigheden

### Leerlingen leren:

- onderscheid te maken tussen vaste en variabele componenten in een situatie. Te denken valt aan een telefoonabonnement waarbij bellen binnen de bundel tegen een vaste prijs plaatsvindt en bellen buiten de bundel tegen een tarief per minuut, sms of MB;
- het verloop van een grafiek te beschrijven met termen als toe- en afnemend, stijgend, dalend, steeds herhalend, minimum, maximum, lineair, constant, periodiek, [havo, vwo] exponentieel;
- het effect van een verandering bij een verband in één van de representaties weer te geven in elk van de andere representaties, ook met digitaal gereedschap;
- aan te geven welk soort gedrag een grootte in de tijd vertoont in concrete situaties. Te denken valt aan gelijkmatige groei (= lineair gedrag) of [havo, vwo] exponentiële groei. Ze leren voorbeelden te geven van wat de bijbehorende verandering voorstelt (plaats en snelheid, temperatuur en afkoelingsgradiënt);
- extreme waarden van een verband te bepalen als die weergegeven wordt in een grafiek of een tabel;
- [kgt, havo, vwo] de richtingscoëfficiënt van een lineair verband in verband te brengen met het veranderingsgedrag van de afhankelijke grootte en [havo, vwo] dat andersoortige verbanden voor elke waarde van  $x$  een raaklijn met een richtingscoëfficiënt kennen;
- [vwo] dat exponentiële verbanden op lange termijn altijd sneller groeien dan lineaire en machtsverbanden;
- [vwo] bij een grafiek een toenamediagram te tekenen en een hellinggrafiek te tekenen met behulp van digitale gereedschappen.

## Aanbevelingen

### Voortgezet onderwijs bovenbouw

Deze bouwsteenset kent in de bovenbouw van havo en vwo een uitgebreid vervolg.

- [havo] Schenk bij wiskunde B aandacht aan differentiaalrekening.
- [vwo] Schenk bij wiskunde A en B aandacht aan differentiaalrekening en bij wiskunde B ook aandacht aan integraalrekening en differentiaalvergelijkingen.

# Veranderingen en benaderingen

## BENADERINGEN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

De basis voor schatten en benaderen ligt in de onderbouw van het primair onderwijs. In de eerste leerjaren maken leerlingen kennis met schatten, voornamelijk in de context van het omgaan met hoeveelheden. Zo leren ze bijvoorbeeld dat je bij een vraag als 'Waar zijn er de meeste van?' niet altijd precies hoeft te tellen om tot een antwoord te komen. In de context van getallen leren ze nadenken over de grootte en relaties tussen getallen: 'ligt 28 dichterbij 20 of 30?'

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- in concrete situaties aantallen tot ten minste 100 te schatten en schattend te vergelijken. Te denken valt aan; beredeneerd schatten hoeveel paaseitjes in een vaas zitten;
- lengtes te schatten met behulp van eigen lichaamsafmetingen (hand, voet, lichaamslengte);
- omtrek en de oppervlakte van een figuur te benaderen.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere leerjaren krijgen schatten en benaderen veel aandacht. De schattingen worden complexer van aard. Bovendien leren leerlingen wanneer een schatting volstaat en wanneer een exact antwoord nodig is. Ook leren zij in situaties redeneren over nauwkeurigheid, orde van grootte en marges.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen schattend uit te voeren met zowel grotere getallen, gehele getallen als decimale getallen;
- verhoudingsproblemen schattend op te lossen (bijvoorbeeld: 243 van de 950 auto's reden te hard. Welk deel is dat ongeveer?);
- de orde van grootte van een uitkomst van een berekening in te schatten (bijvoorbeeld  $23 \times 32$  door er  $25 \times 30$  van te maken) en de juistheid van een berekening op een device te controleren (inschatten of de uitkomsten wel of niet juist kunnen zijn);
- afhankelijk van de situatie een keuze te maken tussen exact en schattend rekenen;
- lengte, oppervlakte en inhoud van objecten te schatten en hierbij eventueel referentiematen te gebruiken. Denk aan hoeveel liter water past er in het zwembad?
- gewichten te schatten en hierbij eventueel referentiematen te gebruiken;
- te redeneren over nauwkeurigheid, de orde van grootte en de marges bij een gegeven situatie. Te denken valt aan: 'Wanneer is een marge van 1 milliliter wel en niet toegestaan?'



## Voortgezet onderwijs onderbouw

### Inleiding

In de onderbouw staan wiskundige technieken centraal die een juiste inschatting van de gezochte oplossing opleveren: benaderen, inklemmen (bijvoorbeeld de zijde van een vierkant van  $20 \text{ m}^2$  bepalen door middel van proberen: eerst 5 m, dan 4 m, dan 4,5 m, dan 4,45 m, enz.), interpoleren en extrapoleren. Deze technieken kunnen in de vorm van een of meer algoritmen weergegeven worden.

### Kennis en/of vaardigheden

#### Leerlingen leren:

- het risico van tussentijds afronden te onderkennen. Te denken valt aan de berekening  $10 : (1,74 - \sqrt{3})$ . Als  $\sqrt{3}$  wordt afgerond tot 1,73, is de uitkomst 1000. Als  $\sqrt{3}$  wordt afgerond tot 1,7321 is de uitkomst 1265,8. Een klein verschil in afronden leidt tot een verschil in uitkomst van ruim 25%;
- vergelijkingen op te lossen met numerieke methoden bijvoorbeeld met behulp van inklemmen of door gebruik te maken van tabellen of grafische en numerieke apps. Te denken valt aan de nulpuntbepaling van een verband;
- te interpoleren (een waarde tussen twee metingen) en te extrapoleren (voorspellingen doen, voortzetten wat je nog niet weet);
- [vwo] andere benaderingsmethoden toe te passen. Te denken valt aan lineaire regressie en hierbij digitale gereedschappen te gebruiken.

## Aanbevelingen

### Voortgezet onderwijs bovenbouw

- [vwo] Leer leerlingen bij wiskunde B een integraal te benaderen met behulp van een Riemansom en een differentiaalvergelijking te benaderen door middel van een differentievergelijking.

# Gereedschap en technologie gebruiken

## GEREEDSCHAP EN TECHNOLOGIE GEBRUIKEN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

Het jonge kind heeft buiten school al kennis gemaakt met allerlei gereedschappen en ook met digitale gereedschappen. Denk daarbij aan een liniaal en ook aan touchscreens, in het bijzonder het gebruiken van schuifbalken en scrollen van teksten, maar ook het vergroten van plaatjes. Zij leren hier op een natuurlijke manier mee omgaan. Deze gereedschappen worden ingezet om het rekenen en andere handelingen te verlichten.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- eenvoudige (digitale) gereedschappen te bedienen en hun standaardfuncties te gebruiken. Te denken valt aan een liniaal om rechte lijnen te kunnen trekken en eenvoudige 3D-software om figuren te tekenen en vanuit verschillende perspectieven te kunnen bekijken;
- verband te leggen tussen analoge en een digitale weergaven van een grootte, te denken valt aan de relatie tussen een analoge en digitale klok;
- afstanden en lengten te meten met behulp van een liniaal.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere jaren van het primair onderwijs maken leerlingen kennis met de rekenmachine en andere (digitale) gereedschappen en leren leerlingen meer over de toepassingen en gebruik ervan, maar maken ze ook kennis met de wiskunde achter de digitale gereedschappen. Het gaat bij dat eerste onder meer om doordacht en verantwoord gebruik van gereedschappen en technologie. Aan bod komen vragen als: Wanneer gebruik ik welk gereedschap? En wanneer niet? Hoe kan ik beoordelen of een gereedschap betrouwbare uitkomsten biedt?

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- standaardfuncties van de rekenmachine te gebruiken;
- specifieke representaties van bewerkingen in digitale gereedschappen. Te denken valt aan \* voor vermenigvuldiging en / voor deling;
- andere (digitale) gereedschappen te bedienen en in te stellen. Te denken valt aan lasermeter en fietscomputer, kompas en passer;
- een keuze te maken voor gereedschappen en technologie die passend zijn voor een situatie;
- de uitkomst of het resultaat van een (digitaal) gereedschap kritisch te beschouwen door de uitkomst vooraf te schatten;

- wiskundige bewerkingen te herkennen bij het gebruik van (digitale) gereedschappen. Te denken valt aan vergroten, draaien en spiegelen bij fotobewerkingssoftware, aan aanzichten in 3D-software en aan de essentie van de werking van een routeplanner.

## Voortgezet onderwijs onderbouw

### Inleiding

In deze fase leren leerlingen om te gaan met een geïntegreerd wiskundepakket of spreadsheetpakket (zoals Geogebra of Excel) of combinaties van applicaties (zoals Wolfram Alpha) en dit te gebruiken en toe te passen. Het gaat hier vooral om doordacht en verantwoord gebruik van de verschillende gereedschappen van dit pakket. Aan bod komen vragen als: Wanneer gebruik ik welk gereedschap/menu? Hoe kan ik beoordelen of de uitkomst betrouwbaar is? Hoe nauwkeurig is de uitkomst? Wat is de foutmarge?

### Kennis en/of vaardigheden

#### Leerlingen leren:

- verbanden te leggen tussen (digitale) gereedschappen en wiskundige concepten. Te denken valt aan het verband tussen een passer en een cirkel;
- hoeken te meten met behulp van een geodriehoek of gradenboog;
- van de rekenmachine en ander digitaal gereedschap ook andere dan standaardfuncties te gebruiken. Te denken valt aan breuken op de rekenmachine, aan pi, goniometrische verhoudingen, kwadrateren en worteltrekken op de rekenmachine en het tekenen van boxplots met behulp van een spreadsheetprogramma;
- geïntegreerde (digitale) gereedschappen te bedienen;
- afhankelijk van een situatie meerdere passende (digitale) gereedschappen in combinatie te gebruiken en daartussen te schakelen;
- de uitkomst(en) die door een (digitaal) gereedschap gegenereerd is (zijn), kritisch te beschouwen door de uitkomst(en) vooraf te schatten, de mate van nauwkeurigheid van de uitkomst aan te geven en aan te geven of een uitkomst exact of bij benadering is;
- wiskundige bewerkingen te herkennen bij het gebruik van (digitale) gereedschappen. Te denken valt aan het opstellen van een cumulatieve frequentietabel in een spreadsheetprogramma, waarbij de gegevens telkens bij elkaar geteld worden;
- verbanden te leggen tussen (digitale) gereedschappen en wiskundige concepten. Te denken valt aan de binaire representatie van getallen, aan het verband tussen een berekende cel in een werkblad van een spreadsheet en een wiskundige formule, aan het verband tussen GPS en coördinaten en aan het verband tussen een randomgenerator en het concept kans.

## Aanbevelingen

### Voortgezet onderwijs bovenbouw

- Leer leerlingen een juiste digitale toepassing te kiezen voor een specifieke taak op basis van hun inzicht in de technologische mogelijkheden en beperkingen van (grafische) rekenmachine en/of computer.

# Wiskundig probleemoplossen

## WISKUNDIG PROBLEEMOPLOSSEN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

Jonge kinderen houden zich al vroeg bezig met probleemoplossen: Een zakje paaseitjes eerlijk verdelen met je broer en zusje vraagt om een oplossing en is voor een kleuter geen routinetaak. Ze zullen tot een oplossing komen zonder gebruik te maken van bekende strategieën, bijvoorbeeld door uit te gaan delen of groepjes te maken en vervolgens bekijken of het eerlijk is gegaan. In de eerste jaren van het po ligt de nadruk voor de leerlingen bij het oplossen van problemen op het informeel zoeken naar oplossingen, vaak handelend en via trial and error. Denk bijvoorbeeld aan een probleem als “Blikgooien: Iemand gooit een bal naar een toren van 6 blikken (3 - 2 - 1). Hoe kan de toren daarna eruit zien? Zoek alle mogelijkheden.” Belangrijk is ook dat ze over hun oplossingen met elkaar communiceren.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- problemen te begrijpen door de situatie en de vraagstelling van het probleem onder woorden te brengen;
- enkele heuristieken toe te passen;
- hun oplossing te controleren in het licht van het gestelde probleem;
- hun aanpak onder woorden te brengen en uit te leggen aan anderen;
- te reflecteren over (de effectiviteit en efficiëntie van) hun aanpak van het probleem. Ze verwoorden of hun aanpak bijgesteld kan worden aan de hand van opgedane ervaringen.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere leerjaren van het primair onderwijs krijgen leerlingen te maken met complexere problemen. Te denken valt aan problemen waarbij te veel of (ogenschijnlijk) te weinig gegevens voorhanden zijn. Ze hebben ook al meer kennis beschikbaar. Ze leren heuristieken meer bewust toe te passen en na te denken over welke heuristiek in welk geval het meest bruikbaar is. De oplossingsaanpak van leerlingen wordt formeler van aard.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- meer heuristieken toe te passen;
- heuristieken bewust toe te passen;
- gereedschap en technologie te gebruiken om een oplossingsstrategie uit te voeren;
- uitkomsten van een oplossingsstrategie correct te bewerken tot een oplossing van het probleem. Te denken valt aan: afronden passend bij de situatie, toevoegen van meeteenheden, onlogische uitkomsten buiten beschouwing laten en een conclusie trekken uit de uitkomsten.

# Voortgezet onderwijs onderbouw

## Inleiding

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs wordt het aanbod uit het primair onderwijs voortgezet. Leerlingen leren op een meer formele manier problemen op te lossen en zijn in staat verschillende heuristieken in combinatie toe te passen. Ook de complexiteit van de problemen neemt in deze fase toe.

## Kennis en/of vaardigheden

### Leerlingen leren:

- de heuristieken die zij in het primair onderwijs geleerd hebben te verfijnen en vlot en vaardig in te zetten bij complexere problemen;
- problemen op te lossen met behulp van een wiskundig model met formules, variabelen, grafieken en/of vergelijkingen;
- gereedschappen en technologie gebruiken om een probleem te analyseren en een oplossingsstrategie te formuleren.

# Aanbevelingen

## Voortgezet onderwijs bovenbouw

Wiskundig probleemoplossen kent een vervolg in alle sectoren en vakvarianten

- Biedt leerlingen de gelegenheid om een – al dan niet vakoverstijgend – complex probleem in langere tijd dan een lesuur op te lossen. Te denken valt aan de probleemstellingen in de CSPE's, wiskunde-examens, aan de opgaven van de wiskunde-olympiaden en van de A-lympiaden en aan opgaven uit de Kangoeroe- en de Beverwedstrijd.
- [gt, havo, vwo] Beperk in wiskunde en wiskunde B wiskundig probleemoplossen niet uitsluitend tot toepassingsproblemen. Ook problemen met een oorsprong in de wiskunde horen thuis in wiskunde en wiskunde B.

# Abstraheren

## ABSTRAHEREN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

Kinderen, ook al voordat ze naar de basisschool gaan, zijn van nature geneigd om overeenkomsten te zoeken: 'Kijk, de maan is een rondje, net als de tafel'. Ze leren dat in verschillende vormen (lamp, kopje, rotonde) 'een cirkel' te herkennen is en gaan het woord cirkel zelfstandig gebruiken. Zo is een cirkel een denkobject geworden. In de eerste jaren van het onderwijs zijn leerlingen ook intensief bezig met aantallen, maten en getallen. Ze leren een hoeveelheid van zeven weer te geven met het getal 7, deze 7 los te gebruiken van contexten en erover te denken en redeneren. Dan is 7 een denkobject geworden.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- eerste stappen te zetten om gehele getallen en meetkundige vormen te abstraheren tot denkobjecten. Te denken valt aan: het denkobject 'kubus' en daarbij nieuwe voorbeelden te vinden ('die doos ziet er uit als een kubus');
- eerste stappen te zetten om optellen en aftrekken, vermenigvuldigen en delen te abstraheren tot denkobjecten. Te denken valt aan het besef dat de volgorde waarin je twee getallen optelt niet uitmaakt.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In deze fase maken leerlingen kennis met denkobjecten die andere denkobjecten als representatie hebben. Bovendien maken ze kennis met het verschijnsel dat een bewerking verzelfstandigd kan worden tot een wiskundig object, vaak een getal.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- nieuwe objecten en bewerkingen te abstraheren tot denkobjecten, zoals decimale getallen, percentage en schaal;
- een verhouding als een denkobject te beschouwen met onder andere percentage, breuk en schaal als representaties;
- een breuk als een getal te beschouwen. Te denken valt aan  $\frac{2}{3}$  als uitkomst van  $2 : 3$  en  $\frac{2}{3}$  op de getallenlijn.

# Voortgezet onderwijs onderbouw

## Inleiding

Leerlingen abstraheren verder. Ze leren denkobjecten op een hoger abstractieniveau kennen ('een cirkel is een verzameling punten met gelijke afstand tot het middelpunt') en ze leren andere verzelfstandigde bewerkingen (bijvoorbeeld machten uit machtsverheffen en wortels uit worteltrekken). Ook zetten ze eerste stappen om nieuwe denkobjecten (bijvoorbeeld variabelen) mentaal te construeren uit andere denkobjecten. Dat is alleen mogelijk als leerlingen die andere denkobjecten als nieuwe concreetheid beschouwen.

## Kennis en/of vaardigheden

### Leerlingen leren:

- nieuwe objecten en bewerkingen te abstraheren tot denkobjecten, zoals formule, grafiek, kans, gegevensverzameling en verandering;
- een verband te beschouwen als een denkobject met onder andere grafiek, formule en tabel als representaties;
- [havo, vwo] uitkomsten van bewerkingen als machtsverheffen en worteltrekken, namelijk machten en wortels, als getal te beschouwen;
- variabelen te beschouwen als denkobjecten die de plaats aangeven van een waarde in een formule en die verschillende waarden kunnen aannemen.

# Logisch redeneren

## LOGISCH REDENEREN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

De 'waarom' vragen van heel jonge kinderen laten al zien dat ze op hun manier al aan het redeneren zijn. In de eerste leerjaren maken leerlingen vervolgens kennis met eenvoudige logische redeneringen die voortkomen uit een dagelijkse situatie. Ze leren beweringen van de vorm als ... dan ... te begrijpen en op basis daarvan uitspraken te doen. Ook binnen rekenen komen de eerste logische redeneringen aan bod. Te denken valt aan redeneringen als "als je ergens iets erbij optelt en hetzelfde er weer van aftrekt, hou je hetzelfde over". Ook leren ze op basis van voorbeelden vermoedens te uiten en deze te staven aan de werkelijkheid. Te denken valt aan redeneringen als "Zijn grote dingen altijd zwaarder dan kleine dingen?".

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- op basis van ervaringen en voorbeelden inductief vermoedens te uiten. Bijvoorbeeld door praktisch te redeneren over de stelling "Alle oudste kleuters zijn het grootst";
- ervaringen te verzamelen om beweringen inductief te onderbouwen of weerleggen;
- beweringen van de vorm als ... dan ... te begrijpen en op basis daarvan uitspraken te doen;
- redeneringen met behulp van als ... dan ... in eigen bewoordingen te geven.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere leerjaren worden de logische redeneringen complexer van aard. Ze kennen meer redeneerstappen. Bovendien wordt van leerlingen een formelere redeneerwijze verwacht. Ten slotte is de kennis waar logische redeneringen op worden toegepast, uitgebreider. Leerlingen leren uitspraken te staven of te weerleggen met behulp van denkobjecten die leerlingen zich eigen gemaakt hebben in het proces van abstraheren. Te denken valt aan "Is er bij elke keeropgave een deelopgave te vinden?" of "Zijn alle kubussen balken of zijn alle balken kubussen?"

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- redeneringen onder woorden te brengen met gebruikmaking van (in)formele vaktaal;
- inductief vermoedens te uiten en die te staven of weerleggen aan de hand van voorbeelden;
- deductief een eenvoudige logische redenering te geven. Te denken valt aan: Toon aan dat de som van twee oneven getallen even is. Een oneven getal = een even getal + 1. Dus de som van twee oneven getallen is gelijk aan een even getal + een even getal + 2 en dat is even;



- te voorzien dat logisch redeneren kritisch moet gebeuren en tot fouten kan leiden. “Zijn alle even getallen deelbaar door 6?” Het vinden van drie goede voorbeelden wil niet zeggen dat de redenering waar is voor alle even getallen.

## Voortgezet onderwijs onderbouw

### Inleiding

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs neemt de complexiteit van redeneervraagstukken toe. Er moeten meer redeneerstappen gedaan worden, waarbij kennis en inzicht uit de kennisdomeinen gebruikt moet worden. [havo, vwo] Daarbij is een formele redeneerwijze van belang. [gt, havo, vwo] Verder leren leerlingen nieuwe beweringen deductief af te leiden uit andere beweringen.

### Kennis en/of vaardigheden

#### Leerlingen leren:

- deductief een complexere logische redenering te geven. Te denken valt aan: “in een rechthoek snijden de diagonalen elkaar middendoor. Elke vierkant is een rechthoek. Dus in een vierkant snijden de diagonalen elkaar middendoor.”
- redeneerfouten uit logische redeneringen te halen. Te denken valt aan: “Als je een even getal vermenigvuldigt met een oneven getal, is de uitkomst een even getal, dus als je een even getal deelt door een even getal, krijg je een oneven getal.”
- beweringen staven op basis van analogieën. Te denken valt aan: “ $-1 \times 3 = -3$ , want dat is een logische voorzetting van het rijtje  $2 \times 3 = 6$ ,  $1 \times 3 = 3$ ,  $0 \times 3 = 0$ ”;
- het verschil te begrijpen tussen inductieve, analoge en deductieve redeneringen. Te denken valt aan: Het bewijs dat de som van de hoeken van een driehoek 180 graden is, is van een andere orde dan het opmeten van de hoeken van een driehoek in drie verschillende driehoeken;
- [havo, vwo] redeneringen onder woorden te brengen met behulp van formele vaktaal.

# Representeren en communiceren

## REPRESENTEREN EN COMMUNICEREN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

Het heel jonge kind is al bezig met representeren en communiceren. Te denken valt aan vingertjes opsteken voor hoe oud je bent of de wijsvinger gebruiken om aan te duiden wat ze willen hebben. In de eerste leerjaren van het primair onderwijs is er veel aandacht voor het representeren van hoeveelheden in woorden, beelden en getalsymbolen. De focus ligt hier op het gebruik van de juiste begrippen in vaktaal. Ook leren leerlingen communiceren over bijvoorbeeld hoeveelheden of over hoe je eerlijk kunt meten. Dit representeren en communiceren leren ze binnen alle kennisdomeinen die in deze fase worden aangeboden.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- wiskundige begrippen zoals meer en minder en wiskundige symbolen (+, -, =) te gebruiken;
- aantallen te representeren met behulp van materialen en schema's, zoals een punt op een getallenlijn en cijfersymbolen.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere leerjaren komen meer representaties aan bod en worden ze formeler van aard. Leerlingen maken meer gebruik van wiskundige begrippen, formuleringen en formelere vaktaal. Leerlingen kunnen keuzes voor bepaalde representaties verantwoorden. Bovendien leren leerlingen dat er wiskundige objecten bestaan die andere objecten als representatie hebben.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- dat er verschillende representaties kunnen zijn voor eenzelfde object of bewerking. Te denken valt aan een deling schrijven met verschillende deeltokens  $\div$ ,  $:$  en  $/$  en verschillende representaties gebruiken voor een verhouding zoals een breuk, een percentage of een omschrijving van de vorm "... op de ...";
- deze verschillende representaties in elkaar om te zetten;
- een passende representatie te kiezen in een gegeven situatie. Te denken valt aan het weergeven van maten (10 000 meter als afstand bij schaatswedstrijden, maar 10 kilometer als afstand bij een autorit), het weergeven van grote getallen met 'miljoen' en 'miljard' of uitgeschreven in cijfers, de keuze voor een bepaald diagram om gegevens weer te geven;
- dat er regels zijn voor correct wiskundig taalgebruik en wat het belang is van het correct toepassen van deze regels. Te denken valt aan het gebruik van haakjes en wat er gebeurt bij het ontbreken van haakjes;
- berekeningen, oplossingen en redeneringen correct op te schrijven.

# Voortgezet onderwijs onderbouw

## Inleiding

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs wordt de lijn uit het primair onderwijs voortgezet, waarbij de representaties en communicatie nog formeler van aard zijn. Ook komen er nieuwe representaties bij. Leerlingen leren formele vaktaal te gebruiken en kritisch te zijn op onjuist gebruik hiervan.

## Kennis en/of vaardigheden

### Leerlingen leren:

- formele vaktaal en wiskundige symbolen te herkennen en te gebruiken in gesproken en geschreven tekst. Te denken valt aan begrippen als coördinaten, wortels en pi, maar ook het verkort noteren van  $2 \times 2 \times 2$  naar  $2^3$  en deze uitkomst correct uit te spreken als '2 tot de macht 3'. Of: gebruik van woord- of lettervariabelen in formules;
- niet-alledaagse representaties van wiskundige objecten te herkennen. Te denken valt aan een streepjescode voor getallen;
- verschillende representaties van wiskundige objecten te maken met behulp van wiskundige gereedschappen zoals passer, geodriehoek, gradenboog en digitale gereedschappen;
- verschillende representaties van wiskundige objecten of bewerkingen in elkaar om te zetten. Te denken valt aan het omzetten van een formule in een tabel of een grafiek;
- kritisch te zijn op representaties van gegevens en dit te kunnen verwoorden (fact-checking);
- berekeningen, oplossingen en redeneringen correct op te schrijven.

## Aanbevelingen

### Voorgezet onderwijs bovenbouw

- Stem nut en noodzaak van formele wiskundige representaties af op onderwijssector, leerweg en wiskundevariant. Te denken valt aan de representatie  $a^2 + b^2 = c^2$  van de Stelling van Pythagoras naast een werkschema.
- Betrek correct communiceren over en met wiskunde in bijvoorbeeld profielwerkstukken.
- Stem correct gebruik van reken- en wiskundige representaties af met andere leergebieden.

# Modelleren

## MODELLEREN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

In deze fase gaat modelleren over het beschrijven van een situatie met behulp van schematische voorstellingen, vaktaal en symbolen. Leerlingen leren schematische tekeningen (schetsjes) te maken bij een situatie en met behulp daarvan vragen te beantwoorden. Op basis van de antwoorden beoordeelt hij of het model de situatie op een goede manier voorstelt. In deze fase beperkt het wiskundig modelleren zich tot het domein getallen en bewerkingen.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- een concrete situatie te schematiseren. Te denken valt aan het uittekenen op de getallenlijn bij de volgende situatie “Tijdens de gymles wordt er tikkertje gespeeld. Er zijn 29 kinderen in het veld. De tikker tikt eerst 5 kinderen af. Daarna nog eens 6.”;
- een concrete situatie, al dan niet via een schema, te vertalen naar een formele berekening. Te denken valt aan het opstellen van de berekening  $29 - 5 - 6$  bij bovenstaande situatie;
- op basis van het gevonden antwoord op de berekening te verifiëren of een model een goede voorstelling is van de situatie. Te denken valt aan: “De uitkomst van de berekening is 18 en ik tel dat er nog 18 kinderen in het veld zijn. De berekening lijkt de situatie goed voor te stellen.”

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere jaren van het primair onderwijs leren leerlingen verschillende voorstellingswijzen. Daarnaast leren ze die ook toe te passen op andere kennisdomeinen en in complexere situaties. Wiskundig modelleren kan nu ook op de onderwerpen verhoudingen, meetkunde en combinatoriek toegepast worden. In deze fase komen ook situaties aan bod waarin een leerling aannamen moet maken of veronderstellingen moet doen. Dit gaat in deze fase vooral over het zelf kiezen van ontbrekende gegevens.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- een concrete situatie te schematiseren waarbij leerlingen een keuze maken voor een passende voorstellingswijze, bijvoorbeeld een keuze tussen een getallenlijn of een boomdiagram;
- een concrete situatie te vertalen naar een wiskundig model. Te denken valt aan een tabel, een meetkundig plaatje of een berekening;
- ontbrekende gegevens aan te vullen bij het ontwikkelen van een model. Te denken valt aan: Maak een model voor hoe lang een leerling er over doet om naar school te fietsen als je de fietsafstand en het aantal verkeerslichten onderweg weet. Daarvoor moet je een veronderstelling doen over hoe snel een leerling gemiddeld fietst en hoe lang hij gemiddeld bij een verkeerslicht moet wachten.

# Voortgezet onderwijs onderbouw

## Inleiding

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs leren leerlingen in het bijzonder wiskundige modellen te maken met variabelen en formules, en hiermee te rekenen en te redeneren. Ook kansmodellen doen hun intrede in de vorm van berekeningen bij boomdiagrammen. Ze leren te rekenen met en te redeneren over deze beschreven modellen en er voorspellingen mee te doen. Leerlingen zijn zich ervan bewust dat ze een cyclus volgen. Ook nu maken leerlingen aannamen en doen ze veronderstellingen. Die hebben in deze fase vaak betrekking op het buiten beschouwing laten van variabelen.

## Kennis en/of vaardigheden

### Leerlingen leren:

- een concrete situatie te schematiseren waarbij leerlingen een keuze maken voor een passende voorstelling in complexere situaties;
- een concrete situatie, al dan niet via een 'schema', te vertalen naar een wiskundig model. Te denken valt aan een tabel, een meetkundig plaatje, een berekening, een formule of een kansmodel;
- keuzes te maken welke variabelen wel en niet meegenomen worden in de beschrijving van een model. Te denken valt aan het model voor de Body Mass Index. Die wordt bepaald uit de lengte en het gewicht van een persoon. Variabelen als vetpercentage of buikomvang worden buiten beschouwing gelaten, terwijl die mede bepalen of iemand (te) zwaar is of niet;
- een uitkomst binnen het model te vinden, terug te vertalen naar de werkelijke situatie en kritisch te beschouwen of de juiste keuzes gemaakt zijn bij de keuze van de variabelen en het ontwerpen van het model. Op basis van de kritische beschouwing kan het model aangepast worden;
- te redeneren met behulp van modellen. Te denken valt aan: als de spanning in een stroomkring twee keer zo groot wordt, neemt de stroomsterkte ook met een factor twee toe. Of: Als we in een stroomkring met een weerstand eenzelfde weerstand parallel schakelen, neemt de stroomsterkte met een factor twee toe. Maar als we deze weerstand in serie bijschakelen, halveert de stroomsterkte.

## Aanbevelingen

### Voorgezet onderwijs bovenbouw

- Ontwikkel modelleervaardigheid verder bij toepassingen in de wiskundevakken en vooral bij andere vakken. Te denken valt aan modellen die het gedrag van natuurwetenschappelijke verschijnselen beschrijven en aan macro-economische modellen. Maak hierbij ook gebruik van technologie.
- [havo, vwo] Overweeg het onderwerp lineair programmeren bij wiskunde A toe te voegen. Dit onderwerp leent zich goed voor ontwikkeling van modelleervaardigheden; de achterliggende wiskunde is betrekkelijk eenvoudig, zodat leerlingen hun aandacht kunnen richten op het modelleren als zodanig.

# Algoritmisch denken

## ALGORITMISCH DENKEN

### Primair onderwijs onderbouw

#### Inleiding

Als je bij het aankleden eerst je schoenen aandoet, zullen hele jonge kinderen meteen aangeven dat het zo niet 'hoort': Als je eerst je schoenen aandoet, kun je je sokken immers niet meer aandoen. In veel situaties leren ze dat er een vaste volgorde is, een stappenplan dat je moet volgen. Is dat eerst vooral imiterend, daarna ervaren ze het ook zelf bij bijvoorbeeld het maken van een wagentje van Lego® aan de hand van het stappenplan in het doosje. In deze eerste fase gaat het er niet alleen om dat kinderen kennismaken met 'vaste volgordes', maar ook dat ze de noodzaak hiervan (h)erkennen. Dit is een eerste kennismaking met 'algoritmisch denken'.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- wat een stappenplan met een vaste volgorde is (algoritme) en leren voorbeelden te geven uit het dagelijks leven (de routebeschrijving van huis naar school, bij een spelletje de stappen van je beurt volgen);
- uit te leggen of het werken volgens een vaste volgorde noodzakelijk is of niet in een gegeven situatie. Te denken valt aan: bij een routebeschrijving naar huis is een vaste volgorde hoe je moet lopen wel belangrijk, bij het tafeldekken is dat minder noodzakelijk. Leerlingen leren ook na te denken over de gevolgen als je niet volgens een vaste volgorde werkt;
- eenvoudige stappenplannen (algoritmen) te beschrijven in woorden of door middel van een serie opeenvolgende plaatjes. Te denken valt aan een beschrijving van de volgorde waarin je je kleren aantrekt en een origami-instructie hoe je een figuur maakt met een vouwblaadje.

### Primair onderwijs bovenbouw

#### Inleiding

In de hogere leerjaren van het primair onderwijs leren de leerlingen niet alleen algoritmen herkennen en uit te voeren, maar ook eenvoudige algoritmen zelf te schrijven. Denk aan algoritmes van vaste procedures die ze leren en het schrijven van eenvoudige programma's. Ook leren ze deze beschrijvingen steeds meer formeel te noteren.

#### Kennis en/of vaardigheden

##### Leerlingen leren:

- uit te leggen wat een algoritme is en eenvoudige algoritmen op formele wijze te beschrijven met een opeenvolging van instructies en met als-dan-structuren. Te denken valt aan het beschrijven van de stappen bij cijferen;
- van eenvoudige problemen een oplossingsstrategie als een algoritme te beschrijven. Te denken valt aan een algoritme om uit te rekenen wat je voor iets moet betalen als je een bepaald percentage korting krijgt;
- stappenplannen te testen op fouten en deze eventueel te verbeteren.

# Voortgezet onderwijs onderbouw

## Inleiding

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs bouwen de leerlingen voort op hun kennis en vaardigheden die ze in het primair onderwijs hebben opgedaan. Ze leren gebruik te maken van alle structuren die in een formeel beschreven algoritme voor kunnen komen, zoals opeenvolging, keuze, herhaling en variabelen. Tevens maken leerlingen kennis met hoe instellingen en bedrijven algoritmen gebruiken.

## Kennis en/of vaardigheden

### Leerlingen leren:

- algoritmen op formele wijze te beschrijven;
- de programmeertaal van de digitale gereedschappen die ze tot hun beschikking hebben en die daartoe geschikt zijn, te gebruiken en hiermee eenvoudige programma's te schrijven. Te denken valt aan een programma dat een vergelijking oplost;
- algoritmen voor standaardprocedures en problemen van een specifiek type, kwalitatief met elkaar te vergelijken op effectiviteit en efficiëntie. Te denken valt aan: het vergelijken van een algoritme dat de grootste gemene deler van twee getallen door middel van systematisch uitproberen bepaalt of met het algoritme van Euclides bepaalt;
- zich een voorstelling te maken van algoritmen die instellingen en bedrijven gebruiken om een gepersonaliseerd aanbod van producten, diensten en content te doen.



5.

## **GENERIEKE AANBEVELINGEN VOOR HET LEERGEBIED**



## Algemeen

Hierna staan enkele algemene aanbevelingen die naar de mening van het ontwikkelteam expliciete aandacht behoeven.

- zorg voor blijvende aandacht voor consolidatie, voortzetting en verdieping van alle bouwstenen in het voortgezet onderwijs;
- ga flexibel om met de leertijd. Laat betere leerlingen het curriculum sneller doorlopen en maak ruimte voor verrijking en verdieping in bijvoorbeeld de wiskunde en/of andere vakken;
- geef het vmbo zo snel mogelijk helderheid over de volgorde van veranderingen die het vmbo te wachten staat ten gevolge van:
  - twee wiskundevakken (wiskunde 2F en wiskunde plus) voor alle leerwegen;
  - de ontwikkeling van rekenen in het mbo;
  - de drempelloze doorstroom van vmbo-gt naar havo;
  - de invoering van de Nieuwe Leerweg met daarbinnen een verplicht praktijkvak.

## Professionalisering

Naast uitwerking van de bouwstenen in kerndoelen en eindtermen is naar onze mening nascholing voor leraren in het primair en voortgezet onderwijs noodzakelijk. Het betreft hier enerzijds nascholing op het gebied van wiskundekennis, in het bijzonder over kansrekening en statistiek in het primair onderwijs en anderzijds op het gebied van de denk- en werkwijzen. Zonder deze nascholing denken wij dat de door ons voorgestelde vernieuwingen weinig kans van slagen hebben.

## Overladenheid

Het ontwikkelteam heeft als opdracht gekregen overladenheid in het curriculum te verminderen. Wij zijn van mening dat het leergebied Rekenen & Wiskunde niet voor vermindering van leertijd in aanmerking komt. Het belang van Rekenen & Wiskunde neemt in de toekomst toe. Dat rechtvaardigt een groter aandeel van Rekenen & Wiskunde in het gehele curriculum. Wij bevelen aan gebruik te maken van mogelijkheden om overladenheid te reduceren in de *uitvoering* van het curriculum. Te denken valt aan verbetering van de interne samenhang, verbetering van de samenhang met andere leergebieden en het lesboek niet als integrale methode, maar als bronnenboek te gebruiken.

## Reken- en wiskundebewust vakonderwijs

Het ontwikkelteam ondersteunt de gedachte dat Rekenen & Wiskunde een plaats verdient in andere leergebieden. Zij beveelt scholen aan dit reken- en wiskundebewust vakonderwijs nader vorm te geven. Het is daarbij belangrijk dat er afstemming plaatsvindt tussen het leergebied Rekenen & Wiskunde, waar leerinhoud wordt aangeleerd en geoefend, en de overige leergebieden waarbij gerekend wordt. Zij beveelt verder aan in de reken- en wiskundeles toepassingsituaties te betrekken uit andere leergebieden.



6.

## **GENERIEKE AANBEVELINGEN VOOR DE BOVENBOUW VAN HET VOORTGEZET ONDERWIJS**

## Wiskunde vmbo

Het ontwikkelteam heeft er kennis van genomen dat in 'Een nieuw perspectief op rekenen in het voortgezet onderwijs' twee wiskundevakken (wiskunde 2F en wiskunde plus) voorgesteld worden. Het valt niet onder de opdracht van Curriculum.nu nadere invulling te geven aan deze beide wiskundevakken. Het ontwikkelteam neemt desondanks de vrijheid om twee aanbevelingen te doen.

## Afstemming in de doorlopende leerlijn

Nadere invulling van de twee wiskundevakken wordt naar verwachting opgedragen aan een nieuw te vormen commissie die de uitkomsten van Curriculum.nu zal meenemen. Daarnaast is er voor het mbo een werkgroep actief om rekenen voor het mbo meer beroepsgericht in te richten nu de rekentoets in het voortgezet onderwijs is afgeschaft. Het ontwikkelteam acht het gewenst dat deze initiatieven op elkaar afgestemd worden zodat er een doorlopende leerlijn via het vmbo ontstaat van het primair onderwijs naar het mbo.

## Borging doorstroom

Vanuit en binnen het vmbo bestaat er een aantal doorstroommogelijkheden. Een meerderheid van de vmbo-leerlingen stroomt door naar het mbo en een minderheid van de vmbo-leerlingen naar het havo. Binnen het vmbo zien we dat een aantal leerlingen na afloop van de basisberoepsgerichte leerweg doorstroomt naar de kaderberoepsgerichte leerweg. Meer specifiek gaat het om de doorstroom van leerlingen van vmbo-bb naar vmbo-kb, van vmbo-kb en vmbo-gt naar mbo-niveau 4 sector techniek en vmbo-gt naar havo. In de huidige situatie zijn er bij deze doorstroommogelijkheden hiaten in de doorlopende leerlijn voor al deze leerlingen. De hiaten zijn het grootst voor de leerlingen die doorstromen van vmbo-bb naar vmbo-kb, van vmbo-gt naar havo en naar een technische mbo-opleiding van niveau 4.

Met het oog op de twee wiskundevakken geeft het ontwikkelteam een tweetal aanbevelingen ter verbetering van de doorlopende leerlijn bij de doorstroom:

- richt in elke leerweg voor alle leerlingen een basiscurriculum wiskunde in dat afgesloten wordt met een centraal examen met de domeinen getallen, verhoudingen, meten en meetkunde, verbanden en statistiek;
- richt daarnaast voor de betere leerling in elke leerweg een doorstroomcurriculum (wiskunde plus) in dat afgesloten wordt met een schoolexamen, afgestemd op het profiel en/of de vervolgopleiding. Zorg dat het wiskunde pluscurriculum tenminste de hiaten opheft in de doorlopende leerlijn van de betreffende doorstroomvariant.

Deze aanbevelingen worden in beeld gebracht in onderstaande figuur.



Figuur 2: Doorstroommogelijkheden binnen en vanuit het voortgezet onderwijs

### Wiskunde in havo en vwo

- Richt op havo en vwo voor alle leerlingen een basiscurriculum wiskunde in dat afgesloten wordt met een centraal examen op de domeinen getallen, verhoudingen, meten en meetkunde, verbanden en statistiek.
- Het uitgangspunt van de NVvW om de koppeling tussen de wiskundevakken en de huidige profielen, zoals wiskunde C voor het profiel Cultuur en Maatschappij, los te laten is interessant. Het ontwikkelteam beveelt aan om naast het basiscurriculum wiskunde de inhoud van de wiskundevarianten in de bovenbouw meer af te stemmen op andere leergebieden en vakken.

### Wiskunde A

Het ontwikkelteam beveelt aan om wiskunde A een unieke plaats met een eigen curriculum te geven in het stelsel van wiskundevakken en -varianten. Ze meent dat wiskunde A geen lichte variant van wiskunde B moet zijn.

### Wiskunde B en C

Het ontwikkelteam heeft doet geen generieke aanbevelingen ten aanzien van wiskunde B en C.

## Wiskunde D

Het ontwikkelteam onderschrijft het bestaansrecht van wiskunde D. Het wiskunde D-programma voor havo en vwo is een keuzeprogramma en kan alleen gekozen worden in combinatie met wiskunde B en behoort niet tot de kern. Er zullen daarom over dit vak geen aanbevelingen gedaan worden.

## Ontwikkeling bovenbouw havo en vwo

In de vervolgfase worden eindtermen ontwikkeld voor de wiskundevakken in de bovenbouw van havo en vwo. Het ontwikkelteam beveelt aan om dit te doen in samenwerking met vervolgopleidingen. In de beschrijving van de bouwstenen doet het ontwikkelteam specifieke aanbevelingen. Die hebben betrekking op vernieuwingen in de bovenbouw. Daar waar geen vernieuwingen voorgesteld worden, doet het ontwikkelteam geen specifieke aanbevelingen.

## Bijlage Begrippenlijst

<b>Abstraheren</b>	Het uit probleemsituaties isoleren van specifieke overeenkomsten en verschillen, zodat deze als nieuwe, opzichzelfstaande denkobjecten kunnen worden beschouwd.
<b>Algoritme</b>	Een beschrijving van het stap voor stap, in een vaste volgorde, vanuit een beginsituatie toewerken naar een bepaalde uitkomst.
<b>Automatiseren</b>	Het (vrijwel) routinematig uitvoeren van rekenhandelingen.
<b>Begripsvorming</b>	Het verwerven van inzicht met betrekking tot een concept.
<b>Complexiteit</b>	Hoe moeilijk een reken-/wiskundige taak is die leerlingen moeten (kunnen) uitvoeren.
<b>Concept</b>	Een reken- en/of wiskundig begripselement, zoals Getal, Verhouding en Verandering, dat in het hoofd van een leerling een denkobject is.
<b>Context</b>	Een betekenisvolle situatie waarbinnen Rekenen & Wiskunde kan worden toegepast of waarbinnen Rekenen & Wiskunde kan worden geleerd.
<b>Denkobject</b>	Een mentaal wiskundig object dat voor een leerling zelfstandig, dat wil zeggen zonder context, betekenis heeft.
<b>Diagram</b>	Een grafische weergave van een of meer grootheden en hun onderling verband, niet zijnde een grafiek.
<b>Denk- en werkwijzen</b>	Domeinonafhankelijke reken- en wiskundevaardigheden
<b>Domein</b>	Een samenhangende verzameling feiten, concepten en procedures.
<b>(Examen)profiel</b>	Natuur & techniek, natuur & gezondheid, economie & maatschappij en cultuur & maatschappij in havo en vwo. Tien beroepsgerichte profielen in het vmbo.
<b>Formele wiskunde</b>	Het perspectief op wiskunde als een formeel-deductief systeem met grondslagen, stellingen en standaardprocedures.
<b>Functioneel gebruik van wiskunde</b>	Rekenen & Wiskunde gebruiken in situaties van alledag, van beroep, als burger, als werknemer, als (media)consument, ...
<b>Gecijferdheid</b>	De verbinding van kennis, vaardigheden en persoonlijke kwaliteiten, nodig om adequaat en autonoom om te gaan met de kwantitatieve kant van de wereld om je heen.
<b>Gegevens of data</b>	Onbewerkte letters, cijfers en andere of andersoortige symbolen die voor iemand geen betekenis hebben.

<b>Grafiek</b>	Een weergave van een verband tussen twee (of meer) grootheden door middel van met elkaar verbonden punten in een assenstelsel.
<b>Herleiden</b>	Een formule of vergelijking in een andere vorm uitdrukken.
<b>Heuristiek</b>	Een vuistregel of ervaringsfeit die gebruikt wordt om problemen op te lossen, een logische redenering te geven, enzovoorts.
<b>Informatie</b>	Al dan niet bewerkte gegevens die voor iemand betekenis hebben en die bijdragen aan diens kennis ergens van.
<b>(Leer)Inhoud</b>	Verzamelnaam voor zowel wiskundige denk- en werkwijzen als reken-/wiskundekennis.
<b>Kennis</b>	Omvat feitenkennis, procedurele kennis en inzicht.
<b>Leerlijn</b>	Een beredeneerde opeenvolging van leerdoelen en inhouden die leidt tot een bepaald einddoel.
<b>Leerweg</b>	Basisberoepsgerichte, kaderberoepsgerichte, gemengde en theoretische leerweg in het vmbo.
<b>Logische redenering</b>	Een opeenvolging van redeneerstappen die tot doel hebben een bewering te staven of te weerleggen.
<b>Mathematiseren</b>	Een begrip uit het leergebied Mens & Natuur: een beschrijving van een patroon in een verzameling (meet)gegevens.
<b>Memoriseren</b>	Het uit het hoofd leren (inprenten) en kunnen reproduceren van rekenfeiten, zoals optellingen tot twintig en de tafels van vermenigvuldiging.
<b>Model</b>	Een beschrijving van een situatie door middel van een schematische voorstelling en/of wiskundige verschijningsvormen, zoals berekeningen, formules, vergelijkingen, grafieken, meetkundige tekeningen en kansmodellen. Een model wordt wiskundig model genoemd als er uitsluitend wiskundige verschijningsvormen gebruikt zijn.
<b>Modelleren</b>	Een situatie beschrijven door middel van een model.
<b>Onderwijssector</b>	Primair onderwijs, (voortgezet) speciaal onderwijs, voortgezet onderwijs, vmbo, havo, vwo.
<b>Opstroomlijn</b>	Een leerlijn die tot doel heeft leerlingen te doen opstromen naar een hogere onderwijssector; ook wel horizontale leerlijn genoemd.
<b>Probleem</b>	Een vraagstuk waarbij het voor de oplosser niet direct duidelijk is hoe het kan worden opgelost.

<b>Rekenen &amp; wiskunde</b>	Verzamelnaam voor alle vakken en leerdomeinen met rekenen en/of wiskunde in hun naam in alle sectoren. Tevens naam van het ontwikkelteam.
<b>Representatie</b>	Een weergave van een wiskundig object of een wiskundige bewerking. Representaties kunnen schrijfwijzen, notatie en namen zijn, maar ook andere wiskundige objecten.
<b>Toepassing</b>	Gebruik van kennis, inzicht en vaardigheden om een probleem in een bepaalde praktijksituatie op te lossen.
<b>Wiskundevariant</b>	Wiskunde A, B, C en D
<b>Zwaluwstaart</b>	Een stuk(je) leerinhoud in zowel primair als voortgezet onderwijs met als doel een brug te slaan tussen beide onderwijssectoren.



# Grootheden, eenheden, aantallen, hoeveelheden en maten

Een *grootheid* is een kenmerk van een (tastbaar of ontastbaar) object of persoon dat getalsmatig uitgedrukt kan worden en met de waarde waarvan je kunt rekenen.

- voorbeelden van grootheden: de oppervlakte van een tafel, de grootte van een schoolklas, de stroomsterkte in een stroomkring, de duur van een vakantie, de prijs van een product;
- geen voorbeelden van grootheden zijn: de favoriete sport van een persoon, de kleur van een auto, het nummer van de buslijn op een bus.

Van een grootheid van een concreet object of persoon kun je de waarde bepalen. Deze waarde is een *aantal* of is een *maat*, uitgedrukt in een (*maat*)getal en een (*maat*)eenheid. Zo is € 2,95 per stuk een maat voor de prijs van een bepaald product en 1,5 liter een maat voor de inhoud van een bepaald pak melk. Prijs en inhoud zijn grootheden. Zowel met aantallen als met maten kan worden gerekend. Soms kun je een grootheid op meerdere manieren of met verschillende maateenheden in een getal uitdrukken. De grootte van een schoolklas kun je uitdrukken met het aantal leerlingen in de klas, maar ook met vloeroppervlakte van het klaslokaal.

Een aantal kan bepaald worden door dingen of mensen te tellen. Maten zijn ofwel gewoon bekend, of worden door middel van een meting bepaald. Metingen vinden plaats met behulp van een of meer meetinstrumenten. Daarmee bepaal je hoeveel (standaard)maateenheden een bepaalde maat omvat. Er zijn ook maten die uit meerdere maatgetallen + meeteenheden bestaan, zoals de snelheid van een schip of de bloeddruk van een mens.

- voorbeelden van maten: 3 Liter, 3 Nm, € 3,00 per stuk;
- voorbeelden van aantallen: 15 stoelen, 22 kinderen, 3 per dag;
- geen maten en aantallen zijn: rangnummer 14, buslijn 7; dit zijn nummers.

Het begrip *hoeveelheid* wordt op verschillende manieren gebruikt. Als je spreekt van een hoeveelheid melk in een pak, dan staat hoeveelheid voor een grootheid. Maar als je spreekt over de hoeveelheid geld dat je moeten betalen voor een product, dan staat hoeveelheid voor een maat. Een hoeveelheid zitplaatsen in een bus ten slotte is een aantal.

Ten slotte spreken we ook van *referentiematen* en *referentieaantallen*. Een referentiemaat is een maat die een leerling geacht wordt (bij benadering) te kennen of zelf te kunnen bedenken. Een referentieaantal is een aantal dat een leerling geacht wordt (bij benadering) te kennen of zelf te kunnen bedenken.

## Voorbeelden van referentiematen:

- de gemiddelde loopsnelheid van een mens is ongeveer 4 km/uur;
- een volwassen mens is ongeveer 1,80 m lang;
- een etage in een flat is iets meer dan 3 meter hoog;
- een pak suiker weegt 1 kg;
- een voetbalveld is ongeveer 0,5 ha groot;
- het BBP van Nederland is ongeveer 600 miljard euro per jaar.

### Voorbeelden van referentiewaarden:

- er wonen tussen de 17 en 18 miljoen mensen in Nederland.
- in een schoolklas zitten normaliter tussen de 25 en 30 leerlingen.

Referentiewaarden en -aantallen kennen een verwantschap met natuurconstanten. Je zou kunnen zeggen dat een natuurconstante een soort referentiewaarde of -aantal is voor een natuurwetenschapper.

## Ontwikkelteamleden Rekenen & Wiskunde



Anouscha Brakenhoff



Carola van der Wielen



Dorthy van der Male



Elisja Giepmans



Esther van Dooren



Lia Jaspers



Lisette Steenbakkens



Lotte Schouten-de Beijer



Maarten Müller



Marco Stoppelenburg



Marco ten Hoff



Marianne Lambriex



Marieke van Ravenhorst



Monique van Tiel



Roemer Cooman



Sabine Brugman



Sonja Paulssen